

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR

INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL MECÁNICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



**PROYECTO FIN DE CARRERA**

**ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO  
ESTÁTICO DE EJES CON FISURAS DE  
FRENTE ELÍPTICO**

*AUTOR:* Víctor Rodríguez Rodríguez

*TUTOR:* María Belén Muñoz Abella

**SEPTIEMBRE 2009**



# ÍNDICE



## ÍNDICE

1. INTRODUCCION.....	5
1.1. Antecedentes.....	5
1.2. Objetivos.....	6
1.3. Estructura del documento.....	7
2. ESTUDIO TEÓRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UN EJE FISURADO.....	10
2.1. Formulación del problema.....	10
2.1. Coeficientes de flexibilidad.....	14
3. ESTUDIO EXPERIMENTAL.....	20
3.1. Dispositivos de ensayo.....	20
3.2. Características de los ejes.....	23
3.3. Proceso experimental.....	31
4. ESTUDIO ANALÍTICO.....	34
4.1. Eje sin fisura.....	34
4.2. Eje con fisura.....	38
5. ANÁLISIS NUMÉRICO.....	47
5.1. El Método de los Elementos Finitos.....	47
5.2. Introducción al programa <i>ABAQUS 6.7</i> .....	49
5.3. Procedimiento en <i>ABAQUS</i> .....	52
6. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.....	62
6.1. Estudio comparativo experimental-analítico-numérico.....	62
6.2. Influencia de la geometría de la fisura.....	74



7. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS.....	78
7.1.Conclusiones.....	78
7.2.Trabajos futuros.....	79
8. BIBLIOGRAFÍA.....	82
<i>ANEXO: TABLAS DE DATOS DE DESPLAZAMIENTOS</i> .....	85



# 1

# INTRODUCCIÓN

# 1.- INTRODUCCIÓN

## 1.1.- Antecedentes

La mayoría de los componentes mecánicos generalmente contienen defectos de varios tipos o tamaños. En otros casos, los defectos o fisuras pueden aparecer ocasionalmente debido a las condiciones en las que trabaja el componente, acortando su tiempo en servicio. La presencia de fisuras en estos elementos produce modificaciones en su comportamiento estático y dinámico debido a la pérdida de rigidez.

Por este motivo, las técnicas para la detección e identificación de fisuras en elementos mecánicos, cuyo objetivo principal es poder discriminar entre imperfecciones que no comprometen la integridad física del producto, y defectos reales cuyas dimensiones superan los máximos valores admisibles de acuerdo a las normas vigentes, se están desarrollando considerablemente en los últimos tiempos.

En el caso de ejes giratorios, las fisuras crecen en planos perpendiculares a la dirección de éstos, como consecuencia de la fatiga provocada por el carácter cíclico de los esfuerzos a los que están sometidos. Con el fin de detectar su presencia e identificar tanto su posición como su tamaño, se han desarrollado diferentes trabajos en los que se intenta relacionar el comportamiento mecánico de los ejes fisurados y la presencia de las fisuras.

El análisis del comportamiento de ejes fisurados sometidos a esfuerzos de flexión es un tema de gran importancia en los distintos campos de la ingeniería por el problema que comporta la rotura catastrófica de los mismos, tanto en el caso de ejes sometidos a cargas estáticas, como en el de ejes giratorios en el que el problema se complica debido a la apertura y cierre de la fisura.



En la mayoría de los trabajos en los que se estudia el comportamiento de ejes fisurados, se supone que la fisura tiene el frente recto, sin embargo la experiencia muestra que las fisuras de fatiga que aparecen en ejes suelen presentar un frente aproximadamente elíptico.

La presencia de una fisura en un elemento mecánico provoca el aumento de la flexibilidad del elemento produciéndose cambios en su comportamiento que pueden traducirse en incremento de los desplazamientos transversales y disminución de las frecuencias de vibración, entre otros. En la mayoría de los trabajos en los que se estudia el comportamiento de ejes fisurados, se supone que la fisura tiene el frente recto, sin embargo la experiencia muestra que las fisuras de fatiga que aparecen en ejes suelen presentar un frente aproximadamente elíptico. Existen abundantes expresiones que relacionan la flexibilidad de un eje de sección circular con una fisura transversal de frente recto. Sin embargo, el estudio de la flexibilidad en el caso de fisuras con frente elíptico, no ha sido tan exhaustivo, encontrándose algún ejemplo de expresiones aproximadas para la misma. En este proyecto se obtienen, partiendo de ajustes polinómicos del factor de intensidad de tensiones, expresiones de la flexibilidad de un eje con fisura elíptica en función del tamaño y de la forma de la misma en diferentes condiciones.

## **1.2.- Objetivos**

En el presente Proyecto se pretende estudiar el comportamiento bajo cargas estáticas de ejes de sección circular con fisuras de frente elíptico y diferentes profundidades. Este estudio se realizará desde tres puntos de vista: experimental, analítico y numérico. En todos los casos se calculará la deformada del eje y posteriormente se analizarán los resultados obtenidos.

Para conseguir el objetivo principal se deben alcanzar los siguientes objetivos parciales:

- Poner a punto un banco de ensayos en el que se van a conseguir los resultados experimentales y realizar los ensayos correspondientes.
- Aplicar la formulaci3n analítica adecuada que nos permita obtener las ecuaciones de las deformadas de los ejes en cada caso.
- Desarrollar los modelos numéricos mediante un programa de elementos finitos que reproduzcan las mismas condiciones de los ensayos experimentales.
- Procesar y analizar los resultados obtenidos.

### **1.3.- Estructura del documento**

En primer lugar se mostrarán los conceptos teóricos sobre los que se ha cimentado este proyecto y la definici3n de los parámetros característicos que son objeto de estudio (capítulo 2).

A continuaci3n (capítulo 3), se muestra todo lo relacionado al estudio experimental de este proyecto, esto es, los dispositivos de ensayo, las barras utilizadas en dichos ensayos, y el desarrollo del proceso experimental.

Se desarrollará la formulaci3n analítica en base a los conceptos teóricos que permita obtener los desplazamientos verticales en funci3n de la posici3n en el eje para cada geometría de fisura (capítulo 4).



En el siguiente caṕtulo (caṕtulo 5), se realizará un aná́lisis numérico mediante un software de elementos finitos, Abaqus, y los resultados obtenidos podrán ser comparados con los datos que arrojan tanto el estudio analítico como el experimental, y así comprobar si los modelos se ajustan correctamente al comportamiento de un eje fisurado.

En el caṕtulo 6, se llevará a cabo la presentación de los resultados que han sido obtenidos mediante cada uno de los estudios realizados. Este caṕtulo servirá también para discutir y valorar dichos resultados desde varios ámbitos, la comparación de los tres estudios realizados, la influencia de la geometría de la fisura en el desplazamiento máximo.

Finalmente (caṕtulo 7) se mencionarán las diversas conclusiones extraídas del desarrollo del presente proyecto, así como se propondrán una serie de ideas que podrían ser ú́tiles para posibles trabajos futuros.



# 2

## **ESTUDIO TEÓRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UN EJE FISURADO**

## 2.- ESTUDIO TEÓRICO DEL COMPORTAMIENTO DE UN EJE FISURADO

### 2.1.- Formulación del problema

Los cambios en el comportamiento mecánico de un elemento fisurado se producen como consecuencia de una pérdida de rigidez en la sección fisurada o de un aumento de su flexibilidad.



*Figura 2.1. Eje fisurado sometido a flexión y tracción*

La presencia de una fisura en un elemento sometido a un esfuerzo de tracción,  $N$  y a un momento flector,  $M$ , (ver figura 2.1) se puede modelizar admitiendo discontinuidades en los desplazamientos longitudinales,  $\Delta u$ , y en los giros  $\Delta \theta$ , en la sección fisurada relacionados con los esfuerzos transmitidos por ésta mediante:

$$\Delta u = \lambda_{nn} N + \lambda_{nm} M \quad (2.1)$$

$$\Delta \theta = \lambda_{mm} M + \lambda_{mn} N \quad (2.2)$$

donde  $\lambda_{ij}$  son los coeficientes de flexibilidad, y donde:

$$\Delta u = u_2 - u_1 \quad (2.3)$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.4)$$

siendo  $u_1$  y  $\theta_1$  el desplazamiento y el giro de la sección a la izquierda de la fisura y  $u_2$  y  $\theta_2$ , el desplazamiento y el giro de la sección a la derecha de la fisura.

Los coeficientes de flexibilidad de un elemento mecánico fisurado se pueden obtener a partir de las expresiones que relacionan la tasa de liberación de energía,  $G$ , con el factor de intensidad de tensiones,  $K_I$ , que en condiciones de deformación plana tiene la forma:

$$G_N = \frac{1-\nu^2}{E} K_{I,N}^2 = \frac{N^2}{2} \cdot \frac{d\lambda_{nn}}{dA} \quad (2.5)$$

$$G_M = \frac{1-\nu^2}{E} K_{I,M}^2 = \frac{M^2}{2} \cdot \frac{d\lambda_{mm}}{dA} \quad (2.6)$$

donde  $E$  y  $\nu$  son el Módulo de Young y el coeficiente de Poisson respectivamente, del material, y donde  $dA$  es el diferencial de área de la fisura.

Integrando estas ecuaciones se obtienen los coeficientes de flexibilidad para esfuerzos de flexión, tracción y combinado de tracción y flexión como:

$$\lambda_{nn} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,N}}{N} \right)^2 dA \quad (2.7)$$

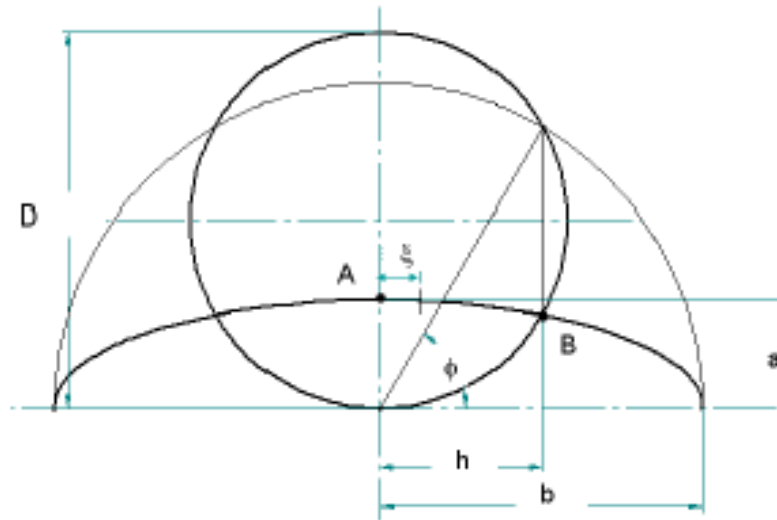
$$\lambda_{mm} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,M}}{M} \right)^2 dA \quad (2.8)$$

$$\lambda_{nn} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \left( \frac{K_{I,N}}{N} \right) \left( \frac{K_{I,M}}{M} \right) dA \quad (2.9)$$

En estas expresiones  $K_{I,N}$  y  $K_{I,M}$  son los factores de intensidad de tensiones en modo I para los esfuerzos considerados.

Para abordar de manera simplificada el estudio del comportamiento de los ejes fisurados y la obtención de la flexibilidad, la mayoría de los autores consideran que las

fisuras de fatiga en un eje presentan frente recto. Aunque esta hipótesis es válida y conduce a resultados conservadores, no representa la realidad de los ejes giratorios fisurados, en los que la fisura presenta un frente aproximadamente elíptico (*Figura 2.2*).



*Figura 2.2. Geometría transversal de la fisura*

Los parámetros característicos de la fisura elíptica son los siguientes:

- $\alpha = \frac{a}{D}$ , longitud característica de la fisura
- $\beta = \frac{a}{b}$ , factor de forma de la fisura ( $\beta = 1$  se corresponde con una fisura de frente semicircular y  $\beta = 0$  de frente recto)
- $\gamma = \frac{r}{h}$ , posición relativa en el frente de fisura

Con estas consideraciones geométricas,  $dA = 2S \cdot da$ , donde  $S$  es la longitud del arco elíptico entre los puntos A y B del frente elíptico (ver *Figura 2.2*), y viene dado por:

$$S = \int_{\arccos \gamma}^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi \quad (2.10)$$

donde  $\bar{h}$  representa la relación  $\frac{h}{b}$ .

Los factores de intensidad de tensiones tambín se deben expresar en t́rminos de la geometŕa del frente eĺptico:

- $K_{I,N} = K_{I,N}(\alpha, \beta, \gamma)$
- $K_{I,M} = K_{I,M}(\alpha, \beta, \gamma)$

Algunos autores han estudiado este problema, dando diferentes expresiones para el factor de intensidad de tensiones como recogen en su trabajo Álvarez et al. [9]. Así Couroneau [10] y Astiz [11], entre otros, lo obtienen por interpolación desde puntos del frente de fisura. Shih y Chen [5] han publicado expresiones para  $K_{I,N}$  y  $K_{I,M}$  particularizadas en los puntos A y B y han aproximado con un valor medio los resultados a todo el frente eĺptico. En un trabajo posterior los mismos autores [12] han obtenido expresiones cerradas para el factor de intensidad de tensiones. Más recientemente Shin y Cai [6] han obtenido expresiones polinómicas del factor de intensidad de tensiones mejoradas respecto a las expresiones anteriores, según las cuales:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.11)$$

$$F_{I,N} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^7 \sum_{k=0}^2 M_{ijk}(\beta)^i (\alpha)^j (\gamma)^k \quad (2.12)$$

$$F_{I,M} = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^6 \sum_{k=0}^2 M_{ijk}(\beta)^i (\alpha)^j (\gamma)^k \quad (2.13)$$

Los coeficientes  $M_{ijk}$  y  $N_{ijk}$  de las ecuaciones (2.12) y (2.13) pueden encontrarse en el trabajo de Shin y Cai [6].

## 2.2.- Coeficientes de flexibilidad

A partir del conocimiento de los factores de intensidad de tensiones en t́rminos de los tres parámetros que caracterizan la fisura, ecuaciones (2.11) a (2.13), las funciones de flexibilidad se pueden calcular como se muestra a continuaci3n, tomando como ejemplo el de la flexibilidad para flexi3n,  $\lambda_{mm}$ .

La tensi3n ḿxima en la secci3n circular debida al momento flector en el eje se puede escribir como:

$$\sigma = \frac{M \frac{D}{2}}{\frac{1}{4} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^4} = \frac{32M}{\pi D^3} \quad (2.14)$$

sustituyendo (2.14) en (2.11) y despu3s en (2.8), la flexibilidad para flexi3n toma la forma:

$$\lambda_{mm} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \int_A \frac{32^2 \pi a}{\pi^2 D^3} F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \gamma) dA \quad (2.15)$$

donde

$$dA = dS da = D^2 d\bar{s} d\alpha \quad (2.16)$$

siendo  $\bar{s} = \frac{s}{D}$ .

Teniendo en cuenta la ecuaci3n (2.10), la expresi3n para el diferencial de arco eĺptico,  $d\bar{s}$ , será:

$$d\bar{s} = \alpha \sqrt{\frac{1}{\beta^2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi \quad (2.17)$$

y sustituyendo en la ecuaci3n (2.15), la flexibilidad para flexi3n queda:

$$\lambda_{mm} = \frac{4096(1-\nu^2)}{\pi E D^3} \bar{\lambda}_{mm} \quad (2.18)$$

en donde,

$$\bar{\lambda}_{mm} = \int_0^{\alpha_f} \int_{\arccos \bar{h}}^{\frac{\pi}{2}} F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \gamma) \alpha d\bar{s} d\alpha \quad (2.19)$$

es el coeficiente de flexibilidad adimensionalizado para flexi3n, correspondiendo  $\alpha_f$  al cociente  $a/D$  final.

Para poder integrar esta ulti3ma expresi3n es necesario establecer una relaci3n geom3trica entre  $\gamma$ ,  $\beta$  y  $\bar{h}$ , para lo cual se debe obtener el valor  $\bar{h} = \frac{h}{b}$ , donde  $h$  (Figura 2.2) representa la intersecci3n del contorno exterior circular del eje dado por la expresi3n:

$$x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 \quad (2.20)$$

Con la forma elíptica de la fisura,

$$\left(\frac{x}{b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1 \quad (2.21)$$

La intersecci3n de las dos curvas permite obtener la expresi3n de  $\bar{h}$ ,

$$\bar{h} = \beta \left[ \frac{\sqrt{\beta^4 - 4\alpha^2(\beta^2 - 1)} + 2\alpha^2(\beta^2 - 1) - \beta^2}{2\alpha^2(\beta^2 - 1)^2} \right]^{1/2} \quad (2.22)$$



donde la relación entre  $\bar{h}$  y  $\gamma$  es función del ángulo  $\Phi$  (ver *Figura 2.2*) y viene dada por:

$$\gamma = \frac{1}{h} \cos \phi \quad (2.23)$$

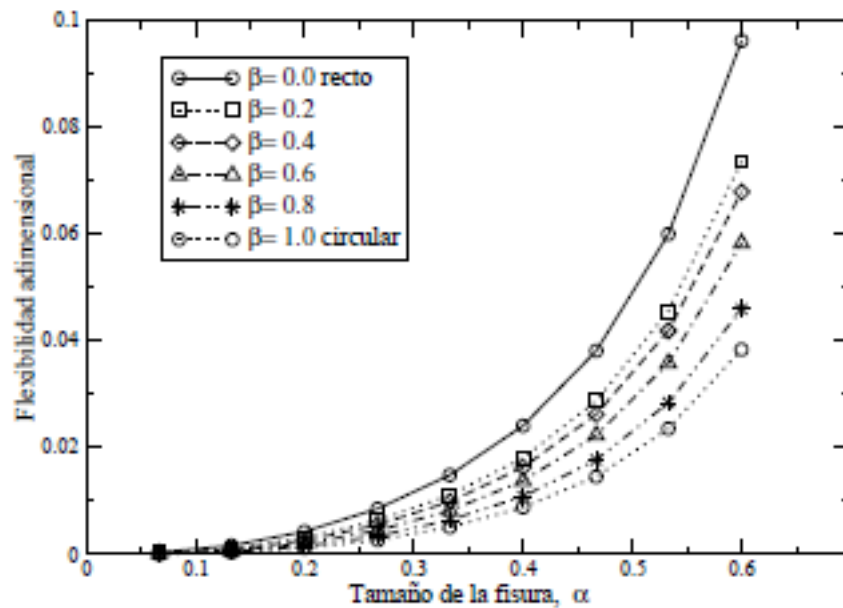
La ecuación (2.19) se escribirá entonces,

$$\bar{\lambda}_{mm} = \int_0^{\alpha_f} \int_{\arccos \bar{h}}^{\frac{\pi}{2}} \bar{H}_{I,M}(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\phi \quad (2.24)$$

donde

$$H_{I,M}(\alpha, \beta, \phi) = \alpha^2 F_{I,M}^2(\alpha, \beta, \phi) \left[ \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \phi + \cos^2 \phi \right]^{1/2} \quad (2.25)$$

Los valores de  $\bar{\lambda}_{mm}$  que se muestran en la *figura 2.3*, se han obtenido mediante la integración numérica de la integral doble de la expresión (2.24) utilizando la regla del trapecio.



*Figura 2.3.* Variación de  $\bar{\lambda}_{mm}$  en función de  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta$

Como era de esperar, y de acuerdo con los resultados de la literatura, la flexibilidad, en todos los casos considerados, aumenta con el tamao de la fisura y con las formas m´s rectas del frente de fisura.

Con estos valores de la flexibilidad para distintas formas de fisura y tamaos, se procede al ajuste polinómico de los coeficientes de flexibilidad para los esfuerzos considerados.

$$\bar{\lambda}_{mm} = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q c_{ij}^{mm} \alpha^i \beta^j \quad (2.26)$$

donde  $c_{ij}^{mm}$  es el coeficiente del ajuste de la flexibilidad adimensional para flexión, y donde  $p$  es el grado del polinomio en  $\alpha$  (tamaño de la fisura), y  $q$  es el grado del polinomio en  $\beta$  (factor de forma de la fisura). El cálculo de los  $n_c = (p+1)(q+1)$  coeficientes  $c_{ij}^{mm}$  de los polinomios de ajuste, se pueden abordar haciendo uso de las técnicas de regresión lineal múltiple.

Para la realización de los ajustes se consideraron tamaos de fisura pequeños, de hasta 1/3 del diámetro, que son las fisuras que más interesa detectar e identificar, y todas las formas del frente de la fisura (desde recto a semicircular). En estas condiciones, los mejores ajustes se consiguieron con polinomios de grado 3 en  $\alpha$  y grado 7 en  $\beta$  para flexión con un coeficiente  $R^2 = 0.99994$ ; de grado 4 en  $\alpha$  y grado 6 en  $\beta$  para tracción con  $R^2 = 0.99981$ ; y de grado 4 en  $\alpha$  y grado 6 en  $\beta$  para flexo-tracción con  $R^2 = 0.99976$ . Los coeficientes de estos ajustes se muestran en la *Tabla 2.1*.

$c_{ij}^{mm}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	-0,00003958	0,00117158	-0,0084829	0,02784321	-0,03276779	-0,00558227	0,03500226	-0,01713963
1	0,00139211	-0,03126027	0,2073178	-0,76721275	1,2434926	-0,65871906	-0,23486614	0,23971832
2	0,0557134	-0,08426677	0,72268391	-3,85171413	11,367897	-18,9255295	15,957613	-5,23778963
3	0,22357101	-1,42112741	11,1389449	-41,8703337	82,4507561	-86,3086166	44,4634972	-8,5512619

*Tabla 2.1.* Coeficientes del ajuste polinómico de  $\bar{\lambda}_{mm}$

Asimismo, se han analizado los errores, mostrados en la *figura 2.4*, cometidos en la estimación de la flexibilidad, calculados como:

$$\varepsilon = \frac{\bar{\lambda}_{ajus} - \bar{\lambda}_{calc}}{\bar{\lambda}_{calc}} \quad (2.27)$$

siendo  $\bar{\lambda}_{calc}$  los valores de la flexibilidad obtenida con la integración de los factores de intensidad de tensiones, y  $\bar{\lambda}_{ajus}$  los obtenidos a partir de la expresión polinómica de la flexibilidad (ecuación 2.26).

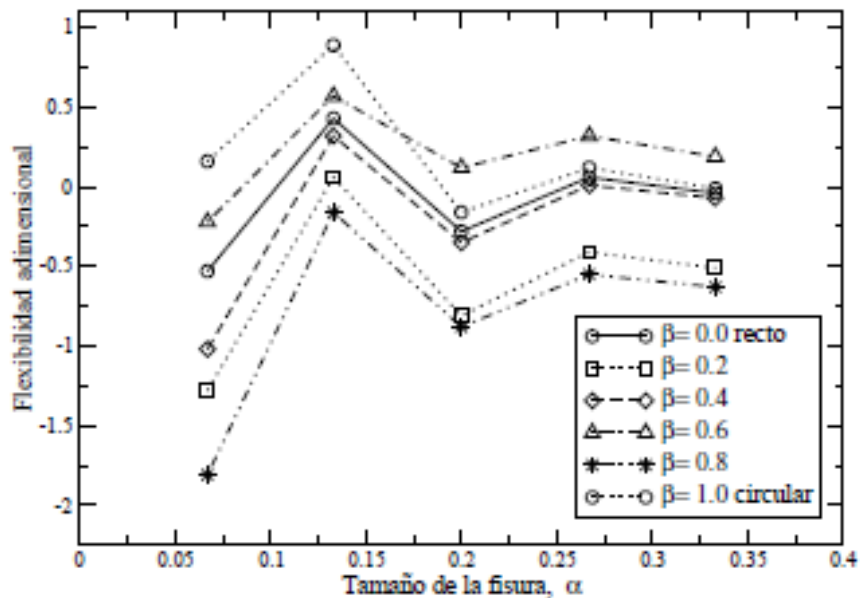


Figura 2.4. Errores en la estimación de  $\bar{\lambda}_{mm}$

Del análisis de los errores se puede concluir que los polinomios de ajuste obtenidos estiman muy bien, con errores prácticamente en todos los casos inferiores al 2%, la flexibilidad para los tres casos considerados para cualquiera que sea la forma del frente de fisura (desde recto a semicircular). Esto es así para tamaños de fisura pequeños, es decir, para fisuras incipientes cuya determinación e identificación resulta un tema de gran interés.



# 3

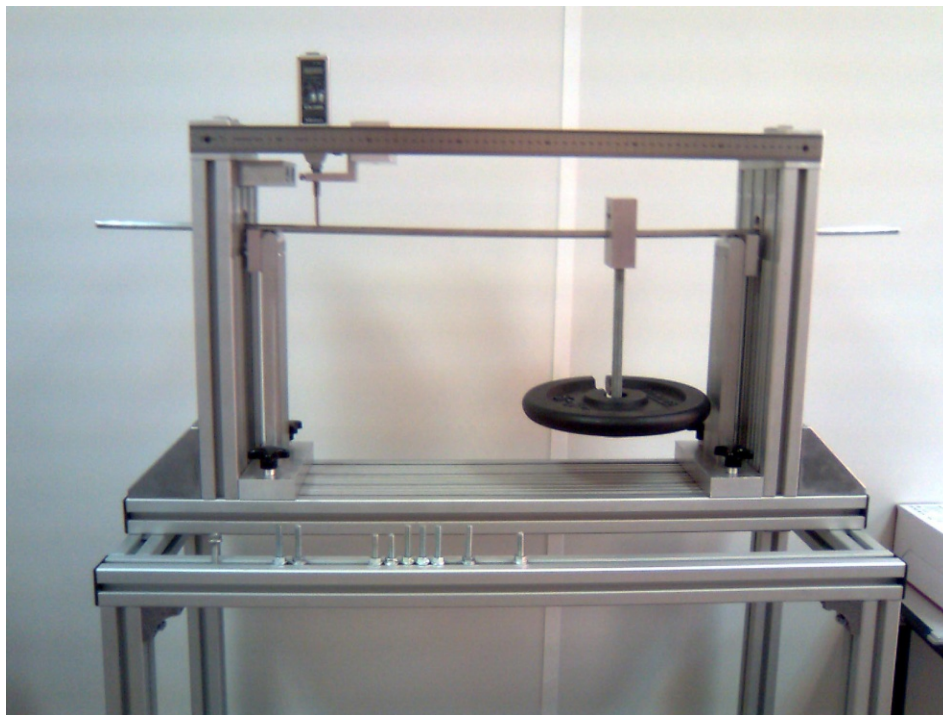
## ESTUDIO EXPERIMENTAL

### 3.- ESTUDIO EXPERIMENTAL

Este apartado se centrará en todo lo referente al estudio experimental de los desplazamientos en un eje fisurado. Se hará referencia a todos los dispositivos de ensayo utilizados para la toma de medidas, utillaje, ejes utilizados como probetas de ensayo. Se compararán los datos obtenidos con los resultados que arroja el estudio analítico, valorando los efectos que provoca la presencia de una fisura en la flexibilidad de un eje.

#### 3.1.- Dispositivos de ensayo

Para la realización de los ensayos cuyos datos se recogerán en este proyecto, se dispone de un marco de ensayos, que permite establecer las condiciones de apoyo necesarias, situar las solicitaciones requeridas y registrar los desplazamientos verticales, que es en este caso el dato que interesa obtener.

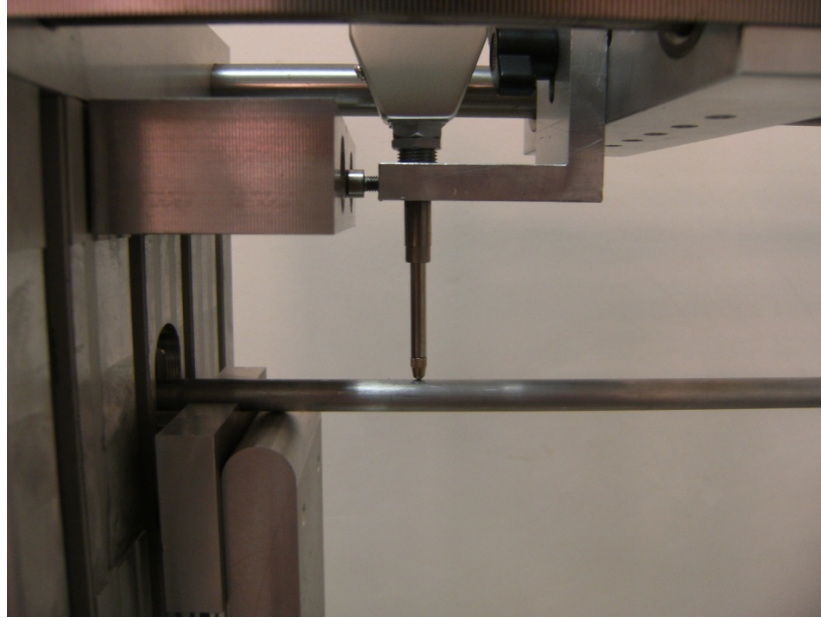


*Figura 3.1.* Vista general del marco de ensayos en situación real de medida

El marco de ensayos utilizado se caracteriza por poseer una estructura manejable que permite una gran flexibilidad a la hora de simular distintas situaciones, distintas condiciones de apoyo, ya sea biapoyado, biempotrado, en voladizo, apoyado-empotrado, etc. En este estudio, la única condici3n de apoyo utilizada ser1 la de eje biapoyado.

La estructura est1 formada principalmente por una bancada, dos soportes m3viles que pueden desplazarse gracias a unas guías en la bancada y que representan los apoyos, dos guías transversales paralelas al eje que ser1 ensayado que permiten el deslizamiento del útil donde se sitúa el dispositivo medidor de desplazamientos. Se dispone tambi3n de un utillaje para la simulaci3n de las condiciones de carga, y de una regla graduada que recorre el eje en toda su longitud, que junto con las guías comentadas anteriormente, permiten obtener los desplazamientos verticales en cualquier posici3n del eje.

El tamaño del marco permite una distancia entre apoyos máxima de 570 mm, que ser1 el caso estudiado en este proyecto. El banco presenta asimismo una *zona muerta*, donde la presencia de pletinas de sujeci3n, topes y dem1s, hace que la toma de datos resulte físicamente imposible, tanto al principio como al final del eje. La longitud de dicha zona muerta es de unos 40-45 mm, desde el apoyo hasta el punto donde se produce la toma del primer dato de desplazamiento vertical. Tambi3n existe una pequeña zona muerta en la regi3n donde se coloca el utillaje de carga.



*Figura 3.2.* Detalle de la zona muerta cercana al apoyo inicial

En lo referente a la disposición de la carga, se dispone de un utillaje que permite la colocación de la carga, simulando de forma más o menos aproximada una carga puntual. La carga a la que se someterá dicho eje se colocará en forma de pesa, además del peso propio de los útiles.

El banco de ensayos dispone también de un reloj comparador para la medida de los desplazamientos verticales a lo largo del eje durante el ensayo. También dispone de una regla graduada a lo largo del eje de desplazamiento del reloj con el fin de poder tomar datos entre puntos separados una cierta distancia establecida. El reloj comparador digital es de la marca *Mitutoyo*, modelo IDU25, con una resolución de 0,01 mm.



*Figura 3.3.* Reloj comparador

### **3.2.- Características de los ejes**

Todos los ejes utilizados en la toma de datos tienen las mismas características, salvo por la geometría de la grieta. Se trata de ejes de aleación de aluminio, que cuenta, entre otros parámetros, con un módulo de Young de 72,5 GPa, y un límite elástico de 97 MPa.



*Figura 3.4.* Vista de la fisura practicada sobre uno de los ejes ensayados



Una de las propiedades que confieren al aluminio un caŕcter especial es su densidad, en torno a  $2800 \text{ kg/m}^3$ , que lo convierte en un metal ciertamente ligero frente a otros, como el hierro o el acero. Presenta también una alta ductilidad, por lo que resulta ser un metal ciertamente idóneo a la hora de realizar estos ensayos de flexión, donde se pueden observar grandes desplazamientos sin llegar a tener plastificación.

Podemos obtener también algunas características geométricas de los ejes utilizados, como son la sección y su momento de inercia. El momento de inercia respecto al eje  $y$  y al eje  $z$ , contenidos en el plano de dicha sección, serán el mismo, ya que se trata de una sección circular.

La sección la obtenemos como  $A = \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} 10^2 = 78,54 \text{ mm}^2$

Los momentos de inercia de dicha sección,  $I_y = I_z = \frac{\pi}{64} D^4 = 490,875 \text{ mm}^4$

La diferencia entre cada uno de los ensayos estriba en la geometría de la fisura. Cada eje posee una geometría de la fisura distinta, variando su forma y profundidad. Como ya se mencionó en el capítulo 2, la profundidad viene dada por el parámetro  $\alpha$ , que expresa la profundidad de la fisura en relación con el diámetro del eje. Por otro lado, la forma se expresa mediante el valor de  $\beta$ . Un valor de  $\beta$  cercano a 1 indica una fisura de frente cercano a una forma semicircular, mientras que, por el contrario, valores de  $\beta$  próximos a 0, indican que la forma del frente de fisura tenderá a ser recta.

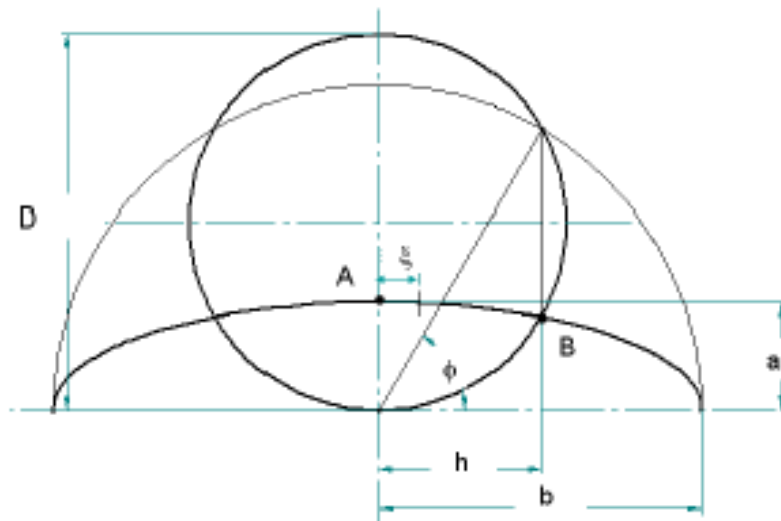


Figura 3.5. Geometría transversal de la fisura

La variación de estos parámetros permitirá observar la influencia que la geometría de la fisura tiene en el comportamiento a flexión, esto es, el valor de flexibilidad y desplazamiento máximo que sufre el eje.

Cada uno de los nueve ejes ensayados posee una relación de parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , y un aspecto de la sección fisurada que se muestran a continuación:

Para la barra 1:

$$\alpha = 0,1$$

$$\beta = 0$$

La longitud de los segmentos a y b que determinan la geometría de la fisura, son:

$$\alpha = \frac{a}{D} \rightarrow a = \alpha \cdot D = 0,1 \cdot 10 = 1 \text{ mm}$$

$$\beta = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{\beta} = \frac{1}{0} \rightarrow \infty, \text{ lo cual quiere decir que la fisura es de frente recto}$$

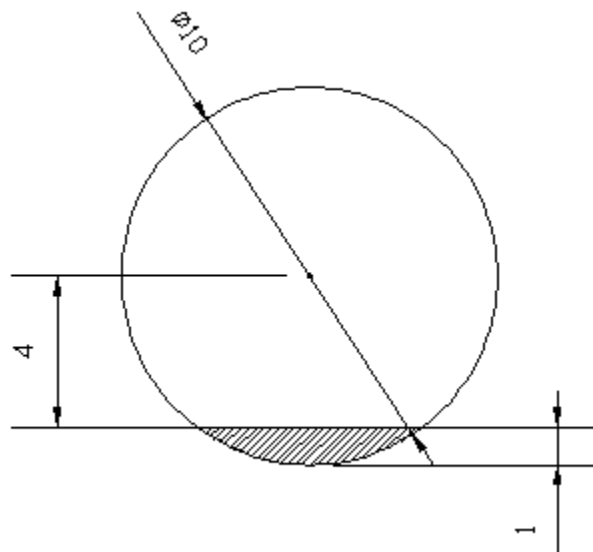
Para el resto de barras, se procede de manera análoga. Los parámetros que determinan la geometría de la fisura se resumen en la siguiente tabla.

	$\alpha$	$\beta$	a (mm)	b (mm)
<b>Barra 1</b>	0,1	0	1	$\infty$
<b>Barra 2</b>	0,2	0	2	$\infty$
<b>Barra 3</b>	0,3	0	3	$\infty$
<b>Barra 4</b>	0,1	0,25	1	4
<b>Barra 5</b>	0,2	0,25	2	8
<b>Barra 6</b>	0,3	0,25	3	12
<b>Barra 7</b>	0,1	0,5	1	2
<b>Barra 8</b>	0,2	0,5	2	4
<b>Barra 9</b>	0,3	0,5	3	6

*Tabla 3.1.* Relación de parámetros de la geometría de las fisuras

El aspecto que tiene la sección fisurada para cada una de las barras utilizadas en los ensayos (las medidas se expresan en milímetros y el área rallada corresponde al área de la fisura) aparecen representados a continuación.

➤ **Barra 1**



*Figura 3.6.* Vista transversal de la sección fisurada para la barra 10

➤ **Barra 2**

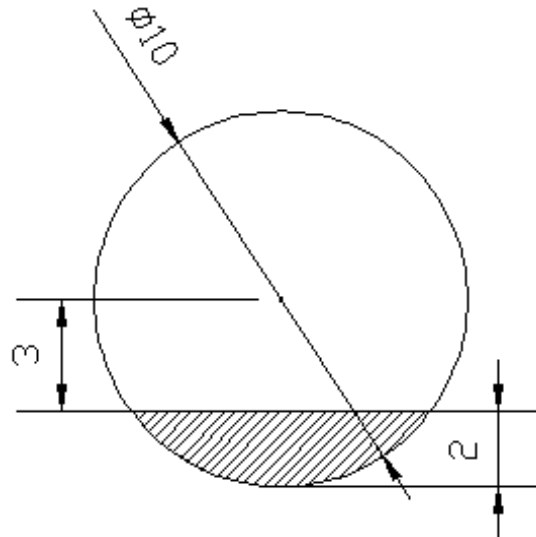


Figura 3.7. Vista transversal de la secci3n fisurada para la barra 11

➤ **Barra 3**

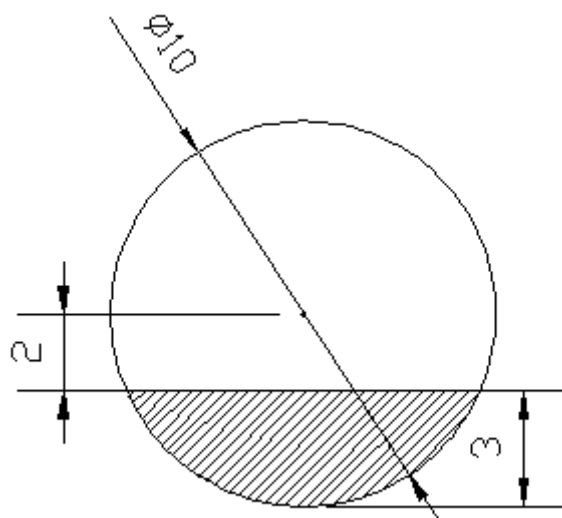
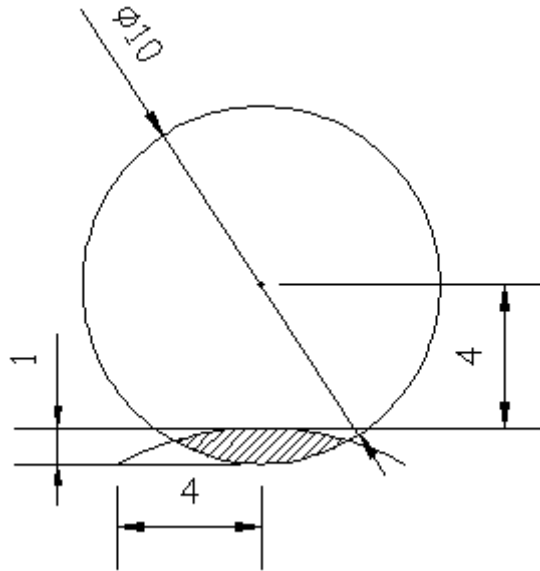


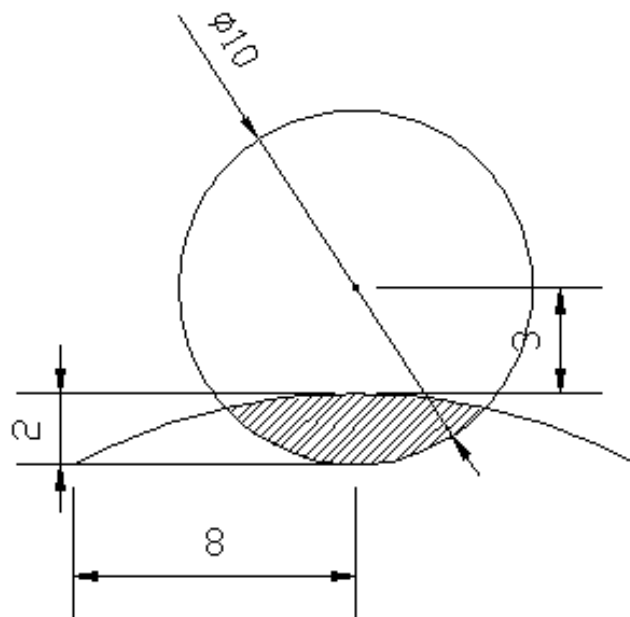
Figura 3.8. Vista transversal de la secci3n fisurada para la barra 12

➤ **Barra 4**



*Figura 3.9.* Vista transversal de la sección fisurada para la barra 13

➤ **Barra 5**



*Figura 3.10.* Vista transversal de la sección fisurada para la barra 14

➤ **Barra 6**

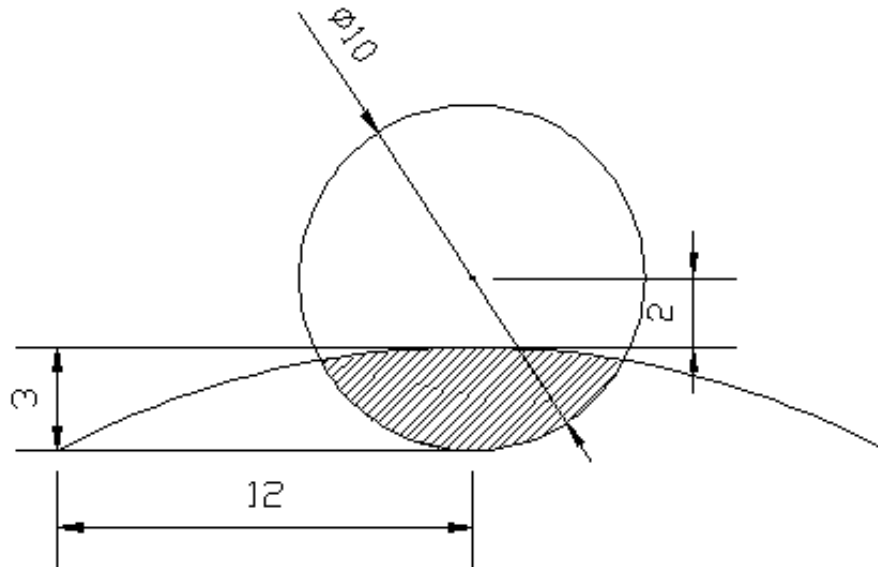


Figura 3.11. Vista transversal de la sección fisurada para la barra 15

➤ **Barra 7**

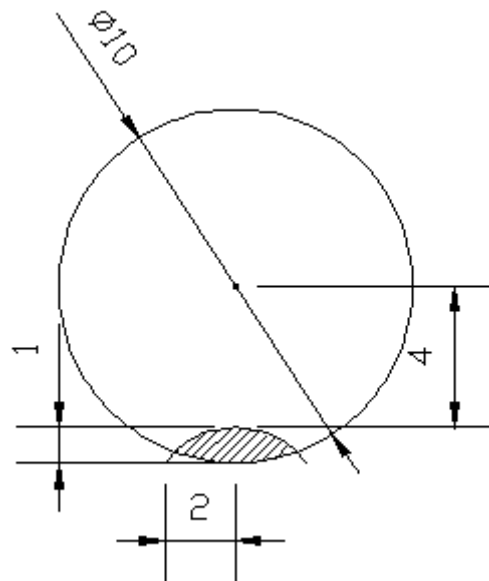
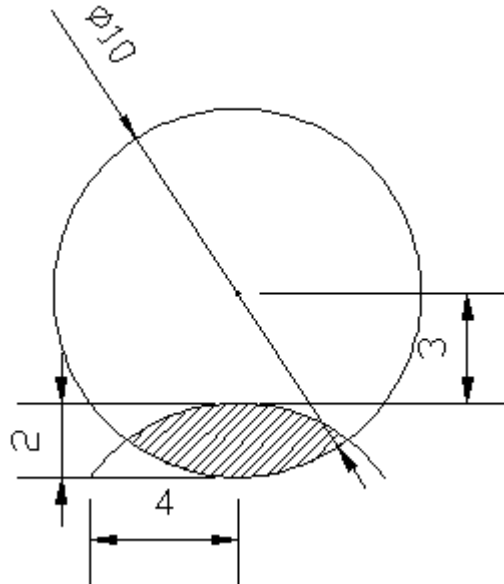


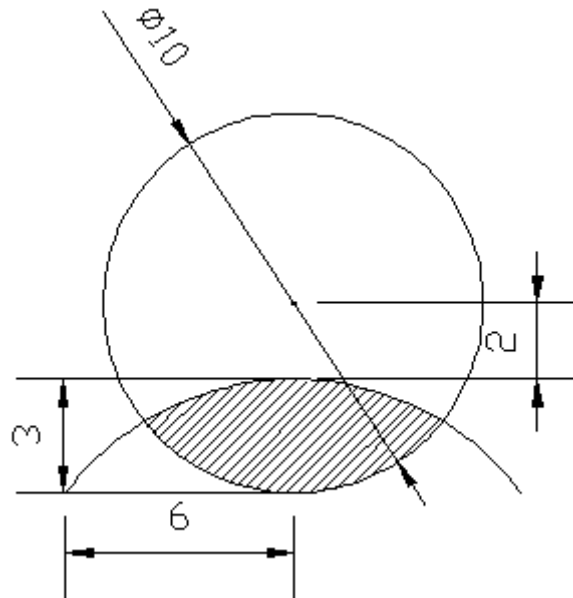
Figura 3.12. Vista transversal de la sección fisurada para la barra 16

➤ **Barra 8**



*Figura 3.13. Vista transversal de la sección fisurada para la barra 17*

➤ **Barra 9**



*Figura 3.14. Vista transversal de la sección fisurada para la barra 18*

### 3.3.- Proceso experimental

Una vez definido tanto el banco de ensayos y la geometría y material de los ejes que se utilizarán, se puede definir el proceso experimental.

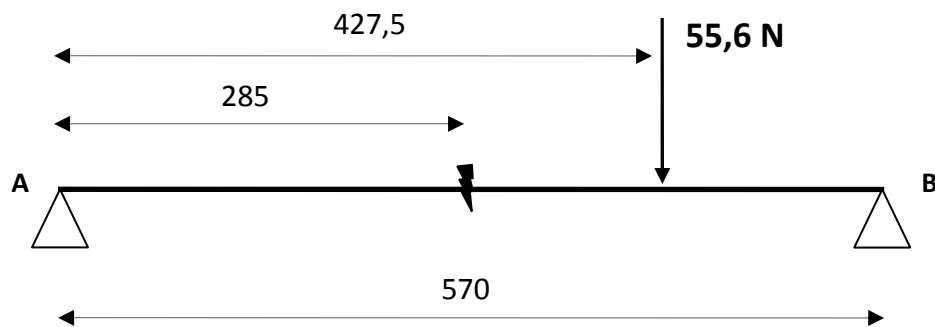
Se realizará un ensayo de flexión por cada eje, siendo nueve el número total de estos. La única variable en todos estos ensayos es la geometría de la fisura. Tanto la posición de la fisura, como la condición de apoyo (biapoyado), la distancia entre apoyos, la carga aplicada, y el punto en el que se aplica dicha carga, son características comunes a los nueve ensayos realizados.

#### CONDICIONES GENERALES DE LOS ENSAYOS

- Diámetro de los ejes: 10 mm
- Condición de apoyo: eje biapoyado
- Distancia entre apoyos: 570 mm
- Fisura colocada en el punto medio del eje, esto es, a 285 mm del origen
- Carga de 55,6 N:
  - Pesa: 48 N
  - Utillaje: 7,6 N
- Posición de la carga: a una distancia del apoyo A correspondiente a tres cuartas partes de la distancia entre apoyos, es decir, 427,5 mm respecto del apoyo A.
- Datos de desplazamientos tomados cada 10 mm recorridos sobre el eje.



A continuaci3n se muestra una vista esquemática de las condiciones de ensayo (todas las distancias se encuentran en *mm*).



*Figura 3.15.* Esquema de las condiciones generales de los ensayos

*\*Nota:* los datos obtenidos durante la campaa de ensayos est3n recogidos en las tablas que se encuentran en el Anexo, en las 3ltimas p3ginas de este documento.



# 4

## ESTUDIO ANALÍTICO

## 4.- ESTUDIO ANALÍTICO

Como ya se ha comentado anteriormente, el objetivo de este proyecto es el estudio del comportamiento de un elemento mecánico (en este caso, un eje de sección circular), con un defecto en forma de fisura en su geometría, bajo una determinada carga estática. Para dicho estudio se utilizarán los datos referentes a desplazamiento vertical debido a dicha sollicitación, que nos permitirán validar un modelo analítico y numérico.

### 4.1.- Eje sin fisura

Para hallar los desplazamientos verticales en un eje sin fisura, se utilizarán herramientas basadas en la Resistencia de Materiales y Teoría de Estructuras. Cabe destacar que, en este proyecto, se analizarán las deformaciones únicamente en el caso de un eje **biapoyado**.

Se pueden utilizar numerosos métodos de cálculo para obtener el desplazamiento transversal en un eje biapoyado. En este caso, se empleará la ecuación de Navier-Bresse, que resulta ser:

$$v_B = v_A - \theta_A(x_B - x_A) + \int_A^B \frac{Q}{GA_C} dx - \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx \quad (4.1)$$

de donde se despreciará la contribución debida a esfuerzos de cortadura ( $Q=0$ ), por lo que, de forma simplificada, quedaría:

$$v_B = v_A - \theta_A(x_B - x_A) - \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x) dx \quad (4.2)$$

Podŕa aplicarse, de igual manera, el Segundo Teorema de Mohr:

$$v_B = v_A - \theta_A (x_B - x_A) - \frac{1}{EI} A_{Mf} d_{(cdg \rightarrow B)} \quad (4.3)$$

Donde:

$v_B$ : es el desplazamiento vertical en la secci3n B, a obtener

$\theta_A$ : es el giro en la secci3n A

$x_B$ : posici3n del punto B, donde se quiere calcular el desplazamiento

$x_A$ : posici3n del punto A, de referencia

$E$ : m3dulo de elasticidad (de Young) del material del eje

$I$ : momento de inercia respecto al eje X (horizontal)

$A_{Mf}$ : 3rea de la ley de momentos flectores entre las secciones A y B

$d_{(cdg-B)}$ : distancia del centro de gravedad de la ley de flectores al punto donde se desea calcular el desplazamiento

Podŕa utilizarse de igual modo la ecuaci3n de la el3stica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.4)$$

El problema queda planteado esquem3ticamente en la *Figura 4.1*.

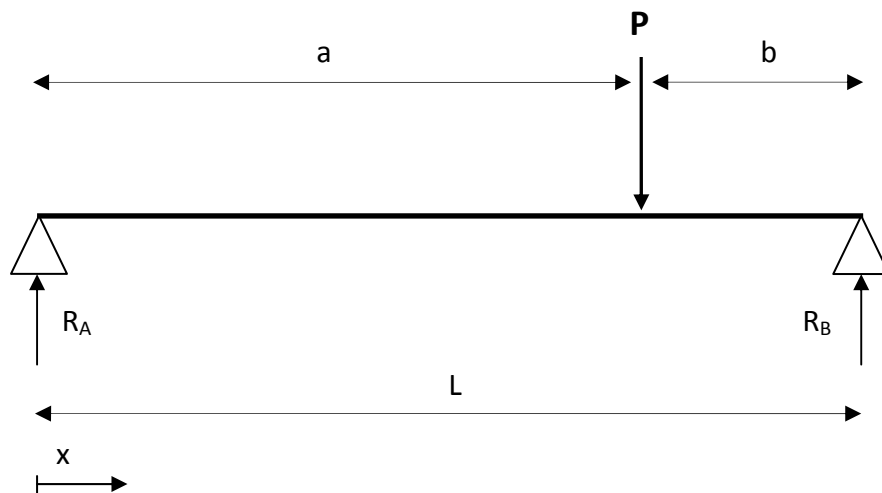


Figura 4.1. Representación esquemática del eje sin fisura

Dividimos en dos tramos:

- Tramo 1: para  $0 \leq x \leq a$

La ley de momentos flectores es

$$M = \frac{Pb}{L} x \quad (4.5)$$

Utilizando la ecuación de la elástica

$$EI \cdot y = \frac{Pb}{6L} x^3 + \frac{Pb}{6L} (b^2 - L^2) x \quad (4.6)$$

- Tramo 2: para  $a \leq x \leq L$

La ley de momentos flectores es

$$M = \frac{Pb}{L}x - P(x-a) \quad (4.7)$$

La ecuación de la elástica

$$EI \cdot y = \frac{Pb}{6L}x^3 + \left( \frac{Pb}{6L}(b^2 - L^2) - \frac{P(x-a)^3}{6L} \right)x \quad (4.8)$$

Los desplazamientos verticales del punto medio, M, son,

$$\text{Si } a \geq b, \quad y_M = \frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI} \quad (4.9)$$

$$\text{Si } a \leq b, \quad y_M = \frac{Pb(3L^2 - 4a^2)}{48EI} \quad (4.10)$$

Por otra parte, los giros en las secciones A y B, correspondientes a los apoyos, son:

$$\theta_A = \frac{Pab(L+b)}{6EIL} \quad (4.11)$$

$$\theta_B = \frac{Pab(L+a)}{6EIL} \quad (4.12)$$

Hemos obtenido el desplazamiento en el punto medio del eje, pero sólo será el máximo desplazamiento si se aplica la carga en dicho punto medio. Con carácter general, podemos hallar el punto donde se producirá el desplazamiento máximo. Para

ello imponemos que la pendiente sea cero ( $EI \cdot y' = 0$ ). De este modo, el punto de eje donde se producirá el máximo desplazamiento, y el valor de dicho desplazamiento serán:

$$x_{y\max} = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} \quad (4.13)$$

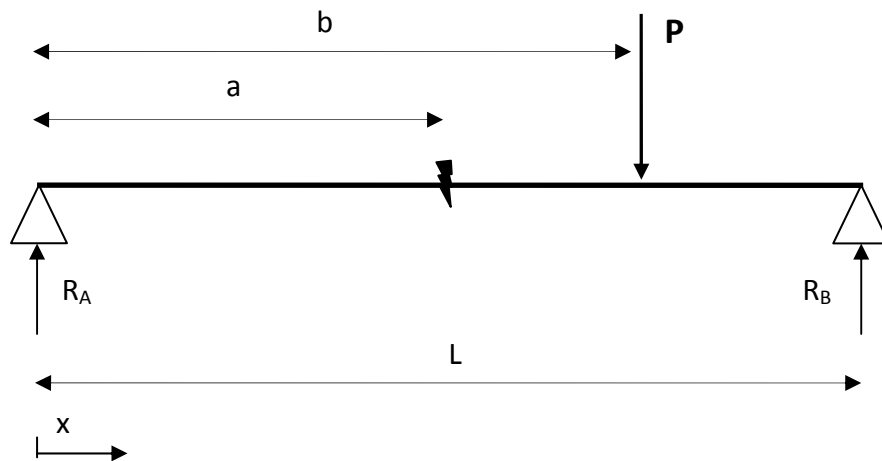
$$y_{\max} = \frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL} \quad (4.14)$$

#### 4.2.- Eje con fisura

La presencia de una fisura provoca un aumento en la flexibilidad del eje que conlleva un aumento en el desplazamiento vertical del mismo. Este aumento de la flexibilidad se traduce en un incremento de giro en la sección donde se encuentra la fisura que dependerá del tipo de frente que presente la fisura,  $\beta$ , la profundidad que alcanza la misma,  $\alpha$ , y del momento flector al que se encuentra sometida la sección fisurada.

Para obtener las expresiones del desplazamiento vertical, se utilizan herramientas de la Resistencia de Materiales. Se dividirá el eje en tramos, y se hallará el desplazamiento en cada uno de ellos. Una vez obtenidos estos, se utilizarán condiciones de contorno y de compatibilidad entre los diversos tramos para conseguir la continuidad en la deformada. Con la expresión de la deformada podrá elaborarse un programa en el software *Matlab* (en su versión 7.0) que permita representar gráficamente el desplazamiento vertical del eje frente a la posición. Se utilizan dos rutinas, una que permite calcular los coeficientes de flexibilidad,  $\bar{\lambda}_{mm}$ , y a partir de estos, mediante una segunda rutina, obtener los valores de desplazamiento vertical frente a posición y su representación gráfica.

En primer lugar, se representa una vista esquemática del eje, con sus condiciones de apoyo y solicitaciones (*Figura 4.2*).



*Figura 4.2.* Representación esquemática del eje con fisura

Se divide el eje en tres tramos. La variable  $x$  recorre el eje en toda su longitud de izquierda a derecha.

- **Primer tramo:**  $0 \leq x \leq a$

La reacción en el apoyo A es:

$$R_A = \frac{P}{L}(L - b) \quad (4.15)$$

El momento flector que sufre la barra según la posición  $x$  es:

$$M_1 = \frac{P}{L}(L - b)x \quad (4.16)$$



La relación entre el desplazamiento vertical y el momento aplicado viene dado por la ecuación de la elástica:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (4.17)$$

siendo E el módulo de elasticidad del material de la viga e I el momento de inercia de la sección.

Integrando una vez en la ecuación de la elástica, obtenemos el giro,  $y'$ , e integrando dos veces, el desplazamiento vertical,  $y$ , del eje.

$$y_1' = \frac{P}{L}(L-b) \frac{x^2}{2EI} + k_1 \quad (4.18)$$

$$y_1 = \frac{P}{L}(L-b) \frac{x^3}{6EI} + k_1 x + k_2 \quad (4.19)$$

▪ **Segundo tramo:**  $a \leq x \leq b$

En este tramo, el momento que soporta el eje es:

$$M_2 = \frac{P}{L}(L-b)x + M_2 \quad (4.20)$$

Integrando de nuevo en la ecuación de la elástica, permite obtener giro y desplazamiento:

$$y_2' = \frac{P}{L}(L-b) \frac{x^2}{2EI} + k_3 + \Delta\theta \quad (4.21)$$

$$y_2 = \frac{P}{L}(L-b) \frac{x^3}{6EI} + k_3 x + k_4 + \Delta\theta \cdot x \quad (4.22)$$

- **Tercer tramo:**  $b \leq x \leq L$

En este tercer y ́ltimo tramo, el momento que soporta el eje es:

$$M_3 = \frac{P}{L}(L-b)x - P(x-b) + M_2 = \frac{Pb}{L}(L-x) + M_2 \quad (4.23)$$

Si se integra la ecuaci3n de la elástica, se obtienen nuevamente el giro y el desplazamiento:

$$y_3' = \frac{Pbx}{EI} - \frac{Pbx^2}{2EIL} + k_5 + \Delta\theta \quad (4.24)$$

$$y_3 = \frac{Pbx^2}{2EI} - \frac{Pbx^3}{6EIL} + k_5x + k_6 + \Delta\theta \cdot x \quad (4.25)$$

Como ya se ha comentado anteriormente,  $y'$  e  $y$  representan, respectivamente, el giro y el desplazamiento en el eje. Por otra parte,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  y  $k_6$  son constantes de integraci3n, y  $\Delta\theta$  es el incremento de giro debido a la presencia de la fisura.

Finalmente, para obtener las constantes de integraci3n aplicaremos las ecuaciones de contorno y de compatibilidad.

- Condici3n de contorno  $y_1(0) = 0$ , esto es, el desplazamiento vertical en el apoyo A es nulo.

$$y_1(0) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{0^3}{6EI} + k_1 \cdot 0 + k_2 \rightarrow k_2 = 0 \quad (4.26)$$

- Condición de compatibilidad  $y_1(a) = y_2(a)$ , es decir, el desplazamiento vertical en la sección donde se encuentra la fisura es el mismo por la izquierda que por la derecha.

$$y_1(a) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{a^3}{6EI} + k_1 a + k_2 \quad (4.27)$$

$$y_2(a) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{a^3}{6EI} + k_3 a + k_4 + \Delta\theta \cdot a \quad (4.28)$$

Se ha obtenido anteriormente que  $k_2 = 0$ , por lo tanto:

$$k_4 = a(k_1 - k_3 - \Delta\theta) \quad (4.29)$$

- Condición de compatibilidad  $y'_1(a) + \Delta\theta = y'_2(a)$ , o lo que es lo mismo, en la sección donde se encuentra la fisura, se produce un aumento del giro,  $\Delta\theta$ .

$$y'_1(a) + \Delta\theta = \frac{P}{L}(L-b)\frac{a^2}{2EI} + k_1 + \Delta\theta \quad (4.30)$$

$$y'_2(a) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{a^2}{2EI} + k_3 + \Delta\theta \quad (4.31)$$

De estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$k_1 = k_3 \quad (4.32)$$

- Condición de compatibilidad  $y'_2(b) = y'_3(b)$ , esto es, el giro en la sección donde es aplicada la carga tiene que ser el mismo a ambos lados de dicha sección.

$$y'_2(b) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{b^2}{2EI} + k_3 + \Delta\theta \quad (4.33)$$

$$y'_3(b) = \frac{Pb^2}{EI} - \frac{Pb^3}{2EIL} + k_5 + \Delta\theta \quad (4.34)$$

De estas dos ecuaciones, se deduce que

$$k_3 - k_5 = \frac{Pb^2}{2EI} \quad (4.35)$$

- Condición de compatibilidad  $y_2(b) = y_3(b)$ , la deformada tiene que ser continua, por lo tanto, el desplazamiento vertical a ambos lados de la sección donde está aplicada la carga debe ser el mismo.

$$y_2(b) = \frac{P}{L}(L-b)\frac{b^3}{6EI} + k_3b + k_4 + \Delta\theta \cdot b \quad (4.36)$$

$$y_3(b) = \frac{Pb^3}{2EI} - \frac{Pb^4}{6EIL} + k_5b + k_6 + \Delta\theta \cdot b \quad (4.37)$$

De estas dos ecuaciones, aplicando la condición de contorno enunciada, se tiene que

$$\frac{Pb^3}{3EI} = b(k_3 - k_5) + k_4 - k_6 \quad (4.38)$$

- Condición de contorno  $y_3(L) = 0$ , ya que el desplazamiento vertical en el apoyo B, debe ser nulo, al igual que en el apoyo A.

$$y_3(L) = \frac{PbL^2}{2EI} - \frac{PbL^3}{6EIL} + k_5L + k_6 + \Delta\theta \cdot L = 0 \quad (4.39)$$

$$\frac{PbL^2}{3EI} = -L(\Delta\theta + k_5) - k_6 \quad (4.40)$$

Con todas las ecuaciones planteadas, todas las constantes de integración, a saber,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ ,  $k_4$ ,  $k_5$  y  $k_6$ , ya pueden ser halladas.

En primer lugar teníamos que:  $k_2 = 0$  (4.41)

De (4.29) y (4.32)

$$k_4 = -\Delta\theta \cdot a \quad (4.42)$$

De (4.35) y (4.37)

$$k_6 = \frac{Pb^3}{6EI} - \Delta\theta \cdot a \quad (4.43)$$

De (4.39)

$$k_8 = \Delta\theta \left( \frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{Pb}{6EIL} (2L^2 - b^2) \quad (4.44)$$

De (4.35)

$$k_3 = \frac{Pb^3}{2EI} + \Delta\theta \left( \frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{Pb}{6EIL} (2L^2 - b^2) \quad (4.45)$$

Ya que  $k_1 = k_3$ , entonces

$$k_1 = \frac{Pb^3}{2EI} + \Delta\theta \left( \frac{a}{L} - 1 \right) - \frac{Pb}{6EIL} (2L^2 - b^2) \quad (4.46)$$

Por lo tanto, una vez halladas todas las constantes de integración, se puede afirmar que las ecuaciones que indican el desplazamiento vertical del eje en los tres tramos en que ha sido dividida su longitud, son:

- Tramo 1:  $0 \leq x \leq a$

$$y_1(x) = \frac{P}{L} (L - b) \frac{x^3}{6EI} + k_1 x \quad (4.47)$$

- Tramo 2:  $a \leq x \leq b$

$$y_2(x) = \frac{P}{L}(L-b) \frac{x^3}{6EI} + k_3x + k_4 + \Delta\theta \cdot x \quad (4.48)$$

- Tramo 3:  $b \leq x \leq L$

$$y_3(x) = \frac{Pbx^2}{2EI} - \frac{Pbx^3}{6EIL} + k_5x + k_6 + \Delta\theta \cdot x \quad (4.49)$$

Para poder obtener el incremento de giro en la secci3n fisurada,  $\Delta\theta$ , en primer lugar se debe hallar el momento flector que sufre el eje en dicha secci3n. Dicho momento flector es:

$$M_1 = \frac{P}{L}(L-b)a \quad (4.50)$$

Una vez que ha sido obtenido el momento flector en la secci3n fisurada, para poder hallar el incremento de giro  $\Delta\theta$ , se aplica la ecuaci3n:

$$\Delta\theta = \lambda_{mm} M_1 \quad (4.51)$$

donde  $\lambda_{mm}$ , como ya se coment3 en el capítulo anterior, es el coeficiente de flexibilidad del eje, que depende de la geometría de la fisura. Este, a su vez, se puede hallar como:

$$\lambda_{mm} = \frac{4096(1-\nu^2)}{\pi E D^3} \bar{\lambda}_{mm} \quad (4.52)$$

Todas estas expresiones analíticas han sido implementadas en Matlab, pudiendo obtenerse la representaci3n gráfca del desplazamiento vertical del eje frente a la posici3n. (*Ver capítulo 6: Resultados y Discusi3n*).



# 5

## ANÁLISIS NUMÉRICO

---

## 5.- ANÁLISIS NUMÉRICO

### 5.1.- El Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es una de las herramientas más potentes usadas en la actualidad para la resolución numérica de un gran número de problemas de ingeniería. Este método es aplicable en una gran variedad de problemas, como pueden ser análisis estructurales, comportamiento mecánico de automóviles, problemas de transferencia de calor, electromagnéticos, etc.

Mediante el MEF se realiza una aproximación para obtener la solución de problemas continuos, basada en transformar un cuerpo de naturaleza continua en un modelo discreto aproximado. A esta transformación se le denomina discretización del modelo.

El continuo se divide en un número finito de partes denominados elementos. Las propiedades del material y sus ecuaciones constitutivas son consideradas sobre dichos elementos, los cuales poseen unos puntos característicos denominados nodos. Estos nodos son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes.

El comportamiento en el interior de cada elemento queda definido a partir del comportamiento de los nodos mediante las “funciones de interpolación” o “funciones de forma”. Estas funciones definen de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada elemento finito, expresado en términos de los desplazamientos nodales de dicho elemento. Es por tanto, una aproximación de los valores de una función a partir del conocimiento de un número determinado y finito de puntos. Si bien las verdaderas funciones de forma son desconocidas, se puede sentar la hipótesis de que su expresión aproximada puede ser obtenida en forma polinómica.



La relación entre estos elementos, considerando debidamente las condiciones de contorno (cargas y restricciones), da lugar a un sistema de ecuaciones cuya solución va a permitir obtener resultados mediante los cuales se va a conocer el comportamiento aproximado del continuo.

El MEF puede dividirse en tres etapas:

- Preproceso. Preparación del modelo para el cálculo. En esta etapa se realizan las operaciones de:
  - Dibujo de la geometría del modelo.
  - Selección de las propiedades de los materiales.
  - Aplicación de cargas exteriores y condiciones de contorno.
  - Discretización del modelo en elementos finitos.
- Resolución. Etapa en la que se realizan todos los cálculos y se generan las soluciones. En ella se realizan las operaciones de:
  - Selección del tipo de cálculo a realizar.
  - Configuración de los parámetros de cálculo, intervalos de tiempo y número de iteraciones.
  - Transferencia de las cargas al modelo, generación de funciones de forma, ensamblaje de la matriz de rigidez, resolución de sistemas de ecuaciones y obtención de la solución.
- Postproceso. En esta etapa se realizará la representación gráfica de los resultados, así como la obtención de resultados indirectos operando las soluciones del modelo.



## 5.2.- Introducción al programa ABAQUS 6.7

ABAQUS es un código de análisis por el Método de los Elementos Finitos de propósito general, orientado a la resolución de problemas no lineales. Fue desarrollado hace más de 20 años por la empresa Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc. (HKS), y en la actualidad se utiliza para resolver grandes y complejos problemas de ingeniería. ABAQUS puede ser utilizado para resolver problemas de resistencia de materiales, mecánica de fractura, ingeniería forense, procesos de conformado de metales, transferencia de calor, etc.

ABAQUS está estructurado en tres grandes bloques, en correspondencia con las tres etapas en que se divide un problema para ser analizado por el Método de Elementos Finitos (preproceso, resolución y postproceso).

ABAQUS se encuentra dividido en cuatro módulos:

- ABAQUS/Standard, para resolución de problemas de propósito general. Incluye todas las posibilidades de análisis excepto el análisis dinámico.
- ABAQUS/Explicit, para resolución de problemas de tipo dinámico. Es poderoso por su eficiencia computacional en grandes modelos, y también altamente efectivo para aplicaciones cuasi-estáticas.
- ABAQUS/CAE, módulo interactivo para la creación de modelos de elementos finitos. A través de este módulo se puede implementar un modelo de forma sencilla y rápida.
- ABAQUS/Viewer, módulo de visualización de soluciones. Muestra los resultados obtenidos una vez resuelto el problema.



Para resolver un problema mediante ABAQUS 6.7 se deben introducir los datos de entrada que necesita el programa. Esta etapa se corresponde con la etapa de preproceso del Ḿtodo de los Elementos Finitos.

Los datos de entrada se introducen en el programa a trav́s de un archivo de texto (*input file*) que contiene toda la informaci3n necesaria para realizar la simulaci3n. Este archivo de texto, tambín denominado “archivo de entrada”, se puede crear de forma interactiva utilizando ABAQUS/CAE, que genera internamente el archivo de texto, o mediante un editor de texto, donde el archivo es escrito directamente por el usuario.

Los datos que se introducen en el archivo de entrada son de dos tipos, *model data* y *history data*.

Los *model data* que se utilizan para definir el modelo de elementos finitos son:

- Geometŕa. La geometŕa es lo primero que se introduce y debe representar lo ḿs fielmente posible el cuerpo real que se va a estudiar. ABAQUS permite realizar modelos de geometŕa muy compleja, gracias al m3dulo ABAQUS/CAE. La geometŕa, aś como el mallado de un modelo, se define mediante los elementos y sus nodos.
- Material. El modelo que se va a implementar puede estar formando de varios materiales. Se deben definir las propiedades de los distintos materiales de los que est́ formado nuestro modelo, y se deben asociar a las partes de la geometŕa a las que correspondan.
- Partes y ensamblaje. La geometŕa del modelo se puede definir organizándola en partes, por lo tanto, hay que introducir en el archivo de entrada la relaci3n que existe entre esas partes, adeḿs de la posici3n relativa de unas respecto de las

otras. Esto se lleva a cabo a travs de un procedimiento conocido como ensamblaje.

- Condiciones iniciales. Se deben especificar las condiciones iniciales del modelo. En ocasiones, es necesario especificar condiciones iniciales distintas de cero para tensiones, temperaturas, velocidades, etc.
- Condiciones de contorno. El modelo puede estar sometido a ciertas imposiciones por parte de su entorno que deben ser especificadas en el archivo de entrada. Se pueden imponer restricciones del movimiento, valores de desplazamientos y rotaciones o condiciones de simetría.
- Interacciones. En ocasiones el modelo que se desea estudiar puede estar formado por varios cuerpos que en un momento dado sufren una interacción o un contacto. ABAQUS permite también realizar modelos ante este tipo de situaciones.
- Definiciones de amplitud. Ciertos estados de carga y condiciones de contorno pueden estar definidas en funci3n del tiempo, por lo tanto se deben introducir los parámetros de las curvas que definen esos estados de cargas y condiciones de contorno.
- Propiedades del entorno. Se pueden definir las características del entorno, como puede ser la humedad, temperatura, presi3n, etc.
- Continuaci3n de análisis. Consiste en introducir resultados de análisis previos para continuar buscando resultados con el nuevo modelo.

Despu3s de introducir el archivo de entrada en el programa, se procede a la resoluci3n del modelo. Esta fase es interna y en ella ABAQUS no interacciona con el usuario. Una vez que ABAQUS ha resuelto el modelo, los resultados de la simulaci3n se ven a travs del m3dulo de visualizaci3n, el cual, lee el archivo de datos de salida

(*output file*), y es capaz de crear animaciones de la simulaci3n, gr1fico, tablas de resultados, etc. La visualizaci3n de los resultados se corresponde con la etapa de postproceso del M3todo de Elementos Finitos.

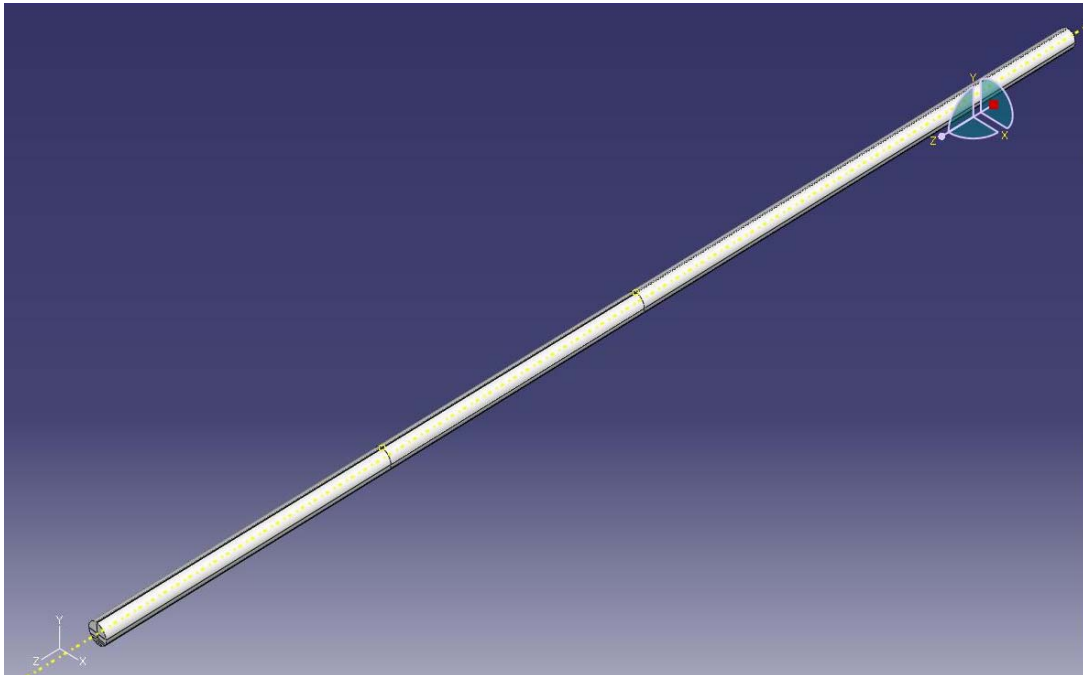
### 5.3.- Procedimiento en ABAQUS

En primer lugar, se realiza el dise1o del modelo a partir del cu1l se va a realizar el an1lisis num3rico. Se define un eje cilíndrico con las siguientes dimensiones y propiedades:

Material	Aleaci3n de Aluminio 2011 T3-T8
Distancia entre apoyos	570 mm
Di1metro	10 mm
Límite el1stico, $\sigma_y$	97 MPa
Límite de rotura, $\sigma_u$	186 MPa
M3dulo el1stico o de Young, E	72,5 GPa
Coeficiente de Poisson, $\nu$	0,33
M3dulo de cortadura, G	26 GPa
Densidad, $\rho$	2800 kg/m <sup>3</sup>

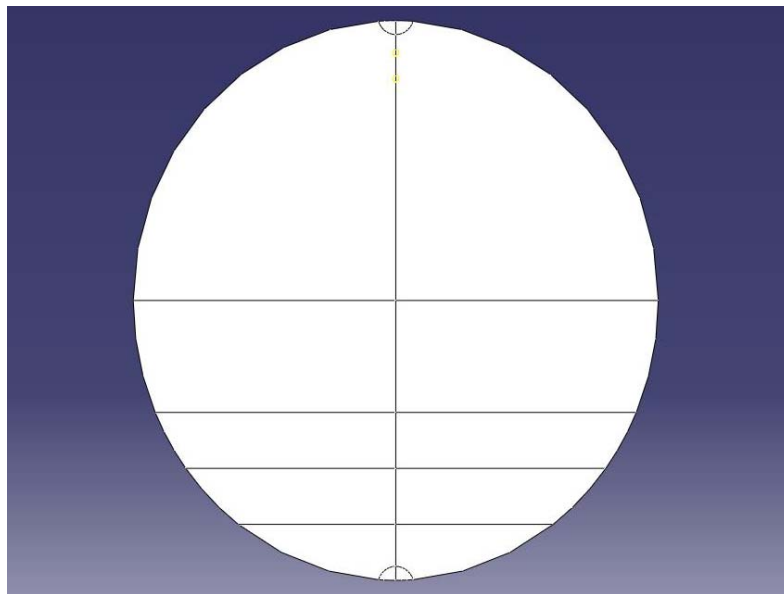
*Tabla 5.1.* Dimensiones de la barra y propiedades del material

Una vez definido el eje del modelo, se han de realizar una serie de particiones a partir de las cuales se modelar1 la presencia de la fisura, y con las cuales se facilitar1 un mallado m1s fino en las zonas de mayor inter3s. El dibujo de las particiones se lleva a cabo en una de las caras de los extremos de la barra, y posteriormente se extienden a lo largo del eje de la misma. Se efectúan tambi3n dos particiones, en este caso perpendiculares al eje de la barra, una en la secci3n de aplicaci3n de la carga (tres cuartas partes de la longitud respecto del apoyo inicial), y otra en la secci3n donde se encuentra la fisura (en la mitad de la barra). El aspecto que presenta la barra con las particiones realizadas se muestra en la siguiente figura.



*Figura 5.1.* Aspecto de la barra con particiones

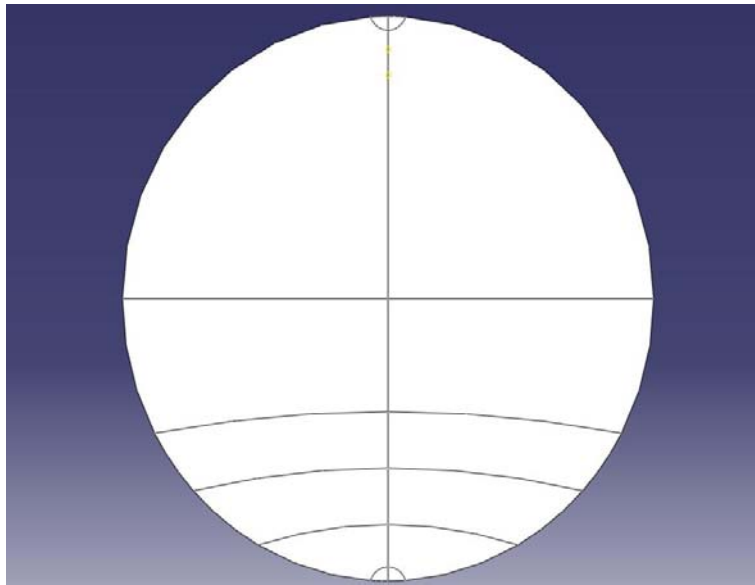
Como cada una de las barras posee una geometría de fisura diferente, se realizan particiones diferentes para cada valor del parámetro  $\beta$ . Para fisuras de frente recto ( $\beta=0$ ), las particiones tendrán la forma mostrada en la siguiente figura:



*Figura 5.2.* Particiones para  $\beta=0$

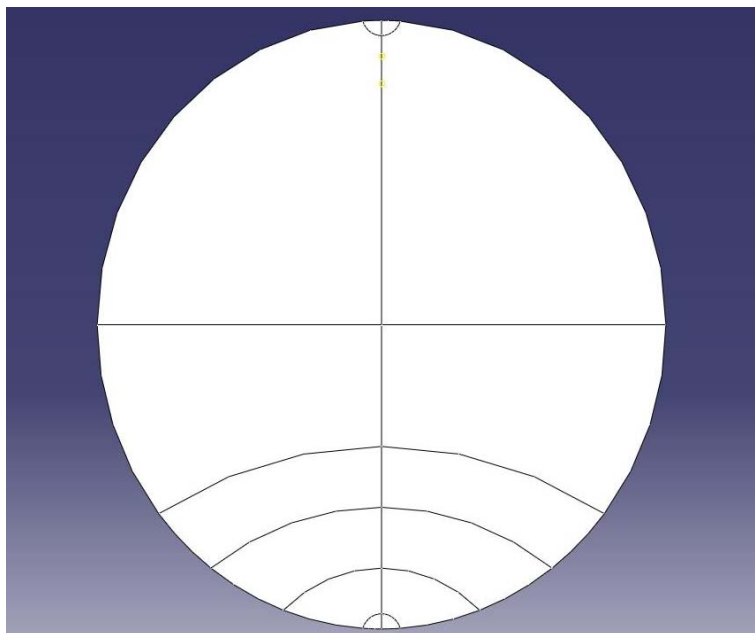
En la figura anterior se pueden apreciar cada una de las tres profundidades analizadas para el caso de fisura de frente recto.

En el caso de una fisura con frente elíptico, en primer lugar, para  $\beta=0,25$ :



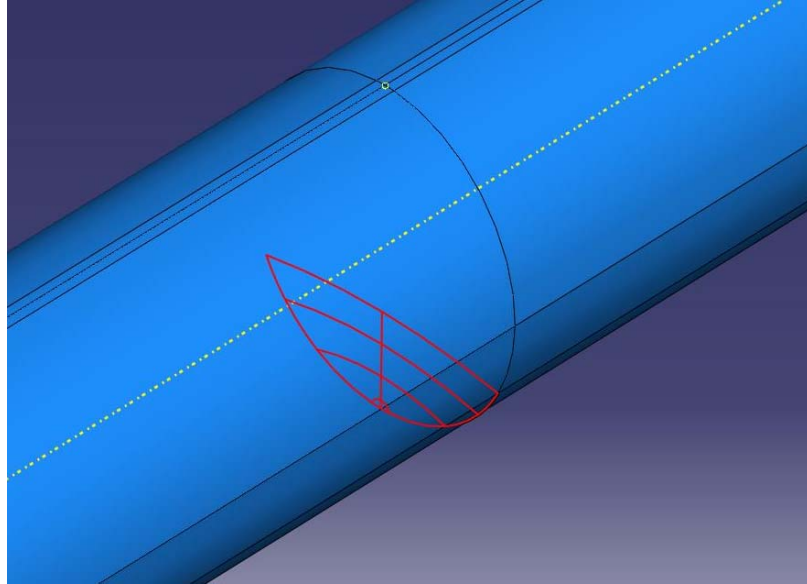
*Figura 5.3. Particiones para  $\beta=0,25$*

Finalmente, para  $\beta=0,5$



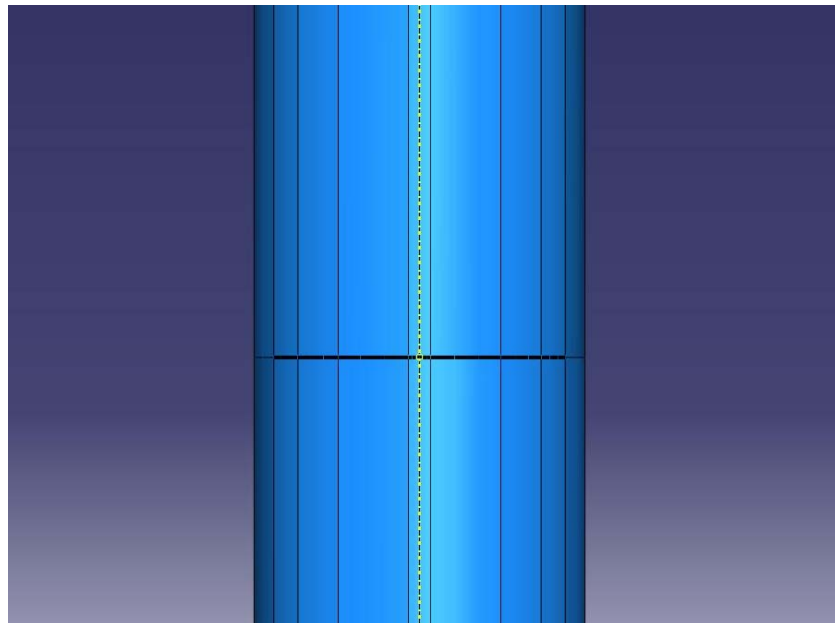
*Figura 5.4. Particiones para  $\beta=0,5$*

Una vez definidas las particiones, para cada barra, se selecciona el área de fisura a partir de dichas particiones. Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra el área de fisura seleccionada para el caso  $\alpha = 0,3$  y  $\beta = 0,25$ .



*Figura 5.5.* Selección área de fisura por particiones para  $\alpha = 0,3$  y  $\beta = 0,25$

Una vez asumida dicha sección, el programa simulará la presencia de la fisura de dicha geometría, y su aspecto se muestra a continuación:

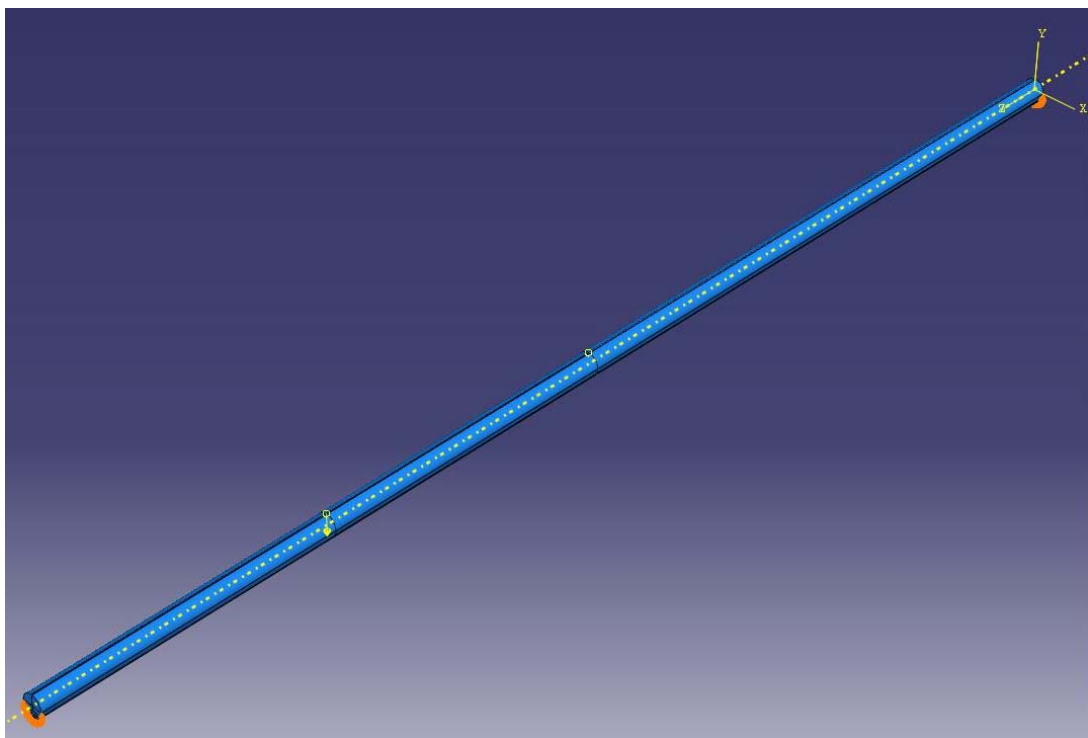


*Figura 5.6.* Detalle de la fisura realizada para  $\alpha = 0,3$  y  $\beta = 0,25$



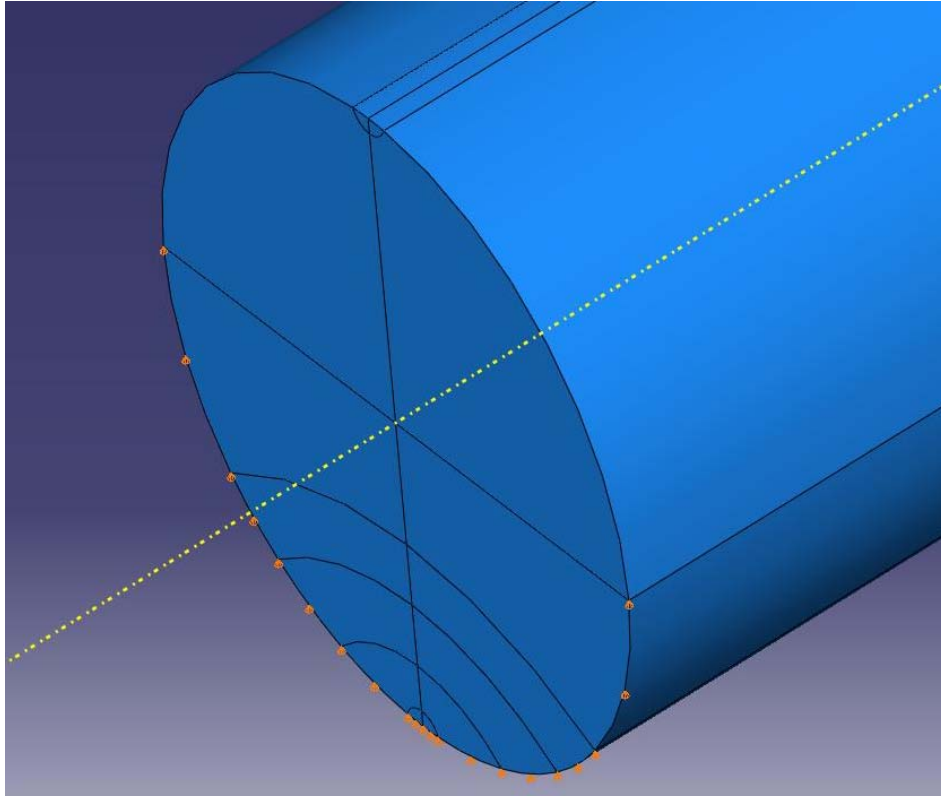
Para el resto de las barras el procedimiento sería análogo, seleccionando en cada caso el área de fisura correspondiente a partir de las particiones definidas.

Con la fisura ya definida, el siguiente paso es aplicar las cargas y condiciones de apoyo. Se asumirá como carga una carga puntual, situada en el punto más superior de la sección donde está aplicada.



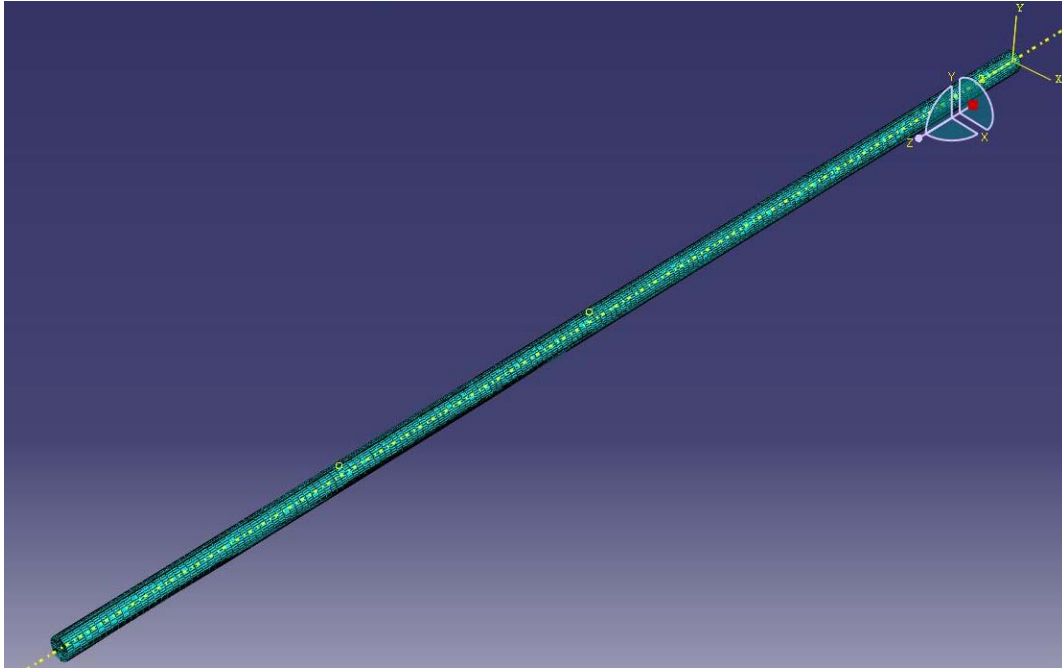
*Figura 5.7. Vista general cargas y apoyos*

El apoyo, sólo se considera a lo largo de la semicircunferencia inferior de la sección de cada uno de los dos extremos de la barra, de manera análoga a cómo se realizó la toma de datos experimental.



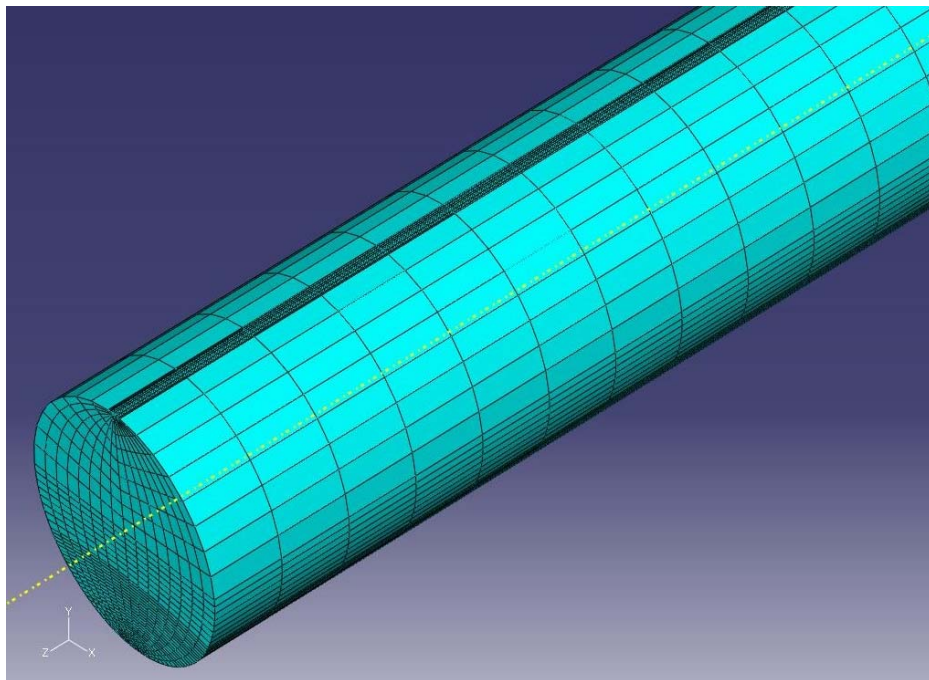
*Figura 5.8.* Detalle de la posición del apoyo

El último paso, antes de comenzar la simulación del problema, es finalmente, realizar el mallado del modelo. Se seleccionan elementos de tipo hexaédrico y se toma como criterio un total de 8 nodos por cada segmento que forma las particiones, y una profundidad de elemento de 3 mm. Con todo esto, el aspecto del modelo una vez mallado es el que aparece en la siguiente figura.



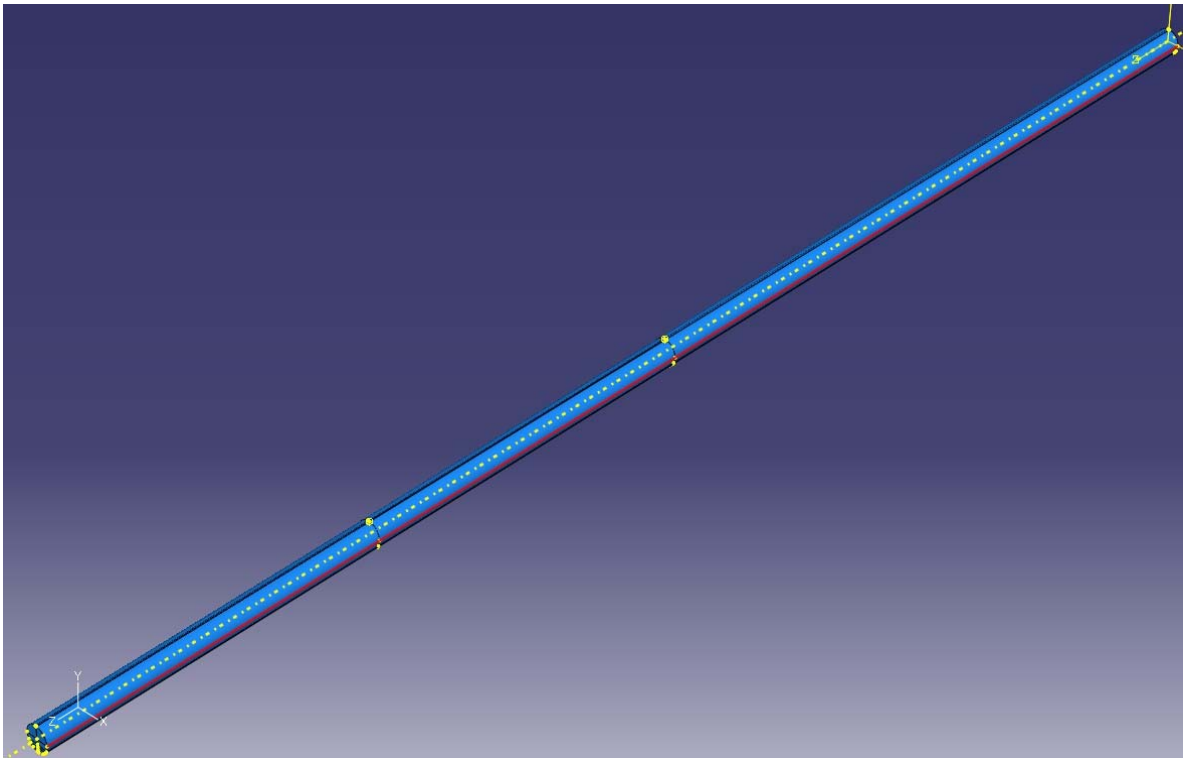
*Figura 5.9.* Vista general de la malla del modelo

Una vista más detallada, de uno de los extremos:



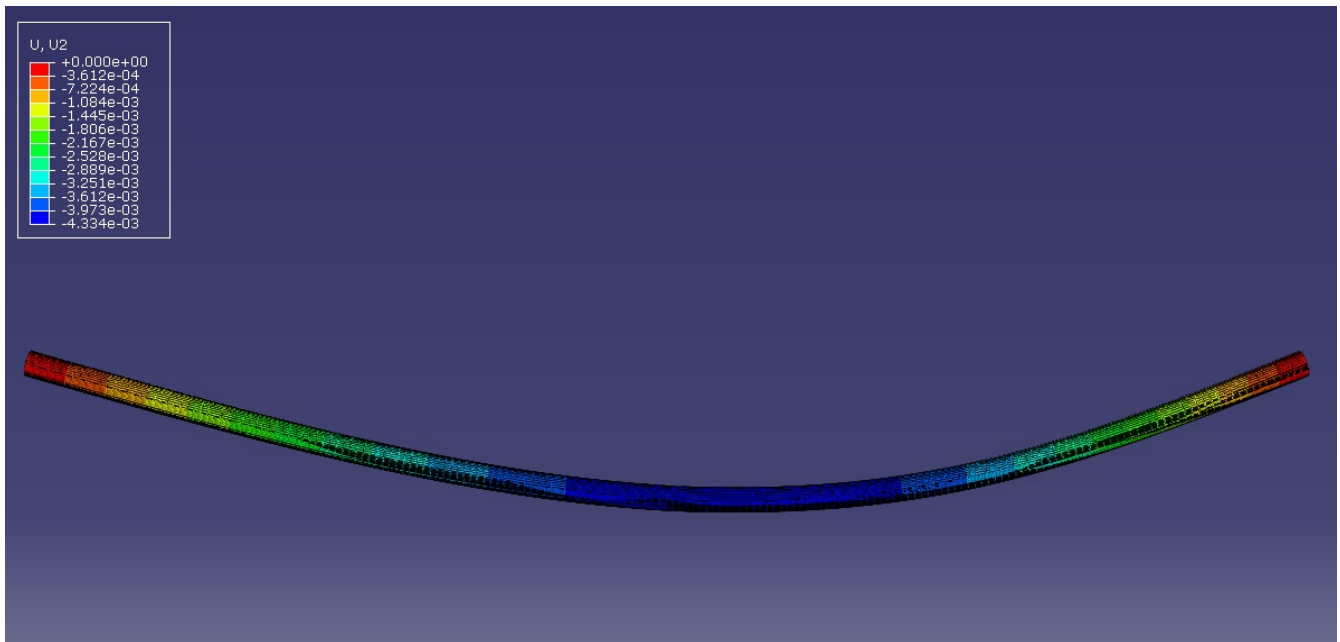
*Figura 5.10.* Vista detalle de la malla

Una vez mallado el modelo, se procederá a la simulación del problema y a la obtención de los resultados de dicha simulación. Se recogerán los datos correspondientes a los nodos sucesivos a lo largo de una de las generatrices del cilindro. Elegimos una de las generatrices laterales (ver *Figura 5.11*). Dichos resultados serán expuestos en el capítulo 6.



*Figura 5.11.* Generatriz del cilindro (en rojo) a lo largo de la que se tomarán los datos

Finalmente, se muestra el aspecto de la deformada de la barra una vez simulado el caso, en la *Figura 5.12*. Se incluye una leyenda con los valores del desplazamiento según los distintos colores.



*Figura 5.12. Aspecto de la deformada*



# 6

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

## 6.- RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente capítulo se procederá a la representación de los resultados de cada uno de los estudios realizados, mediante la representación gráfica de los datos que arrojan dichos estudios, así como también a la interpretación y discusión de los mismos.

### 6.1.- Estudio comparativo experimental-analítico-numérico

La realización de un proceso experimental debe ir acompañada de un estudio analítico y/o numérico que certifique, demuestre y verifique los resultados experimentales obtenidos. En este proyecto, se cuenta como datos reales, tangibles, los obtenidos mediante el proceso experimental. A partir de ahí, se estudia si los modelos analítico y numérico se ajustan al comportamiento que presenta dicho estudio experimental.

Los resultados correspondientes a los estudios analítico y numérico son datos de carácter teórico, que siguen modelos matemáticos y numéricos, y que son ajenos a los imprevistos, incertidumbres, errores, propios de una toma de datos en un proceso experimental. Sin embargo, el estudio experimental es el único que aporta datos reales, visibles, y por lo tanto, será considerado el modelo real, y se obtendrán el error correspondiente al modelo analítico y al numérico.

En el estudio analítico se utiliza el software de cálculo *Matlab*, que, mediante la implementación de un determinado programa, y variando los parámetros correspondientes a cada barra, permite obtener datos analíticos de desplazamiento vertical en función de la posición en el eje.

En el caso del estudio experimental, una vez tomados los datos, se procede a ajustar los mismos a un determinado polinomio, con el cual poder salvar las distintas



zonas muertas que aparecen a lo largo de la barra. Una vez realizado dicho ajuste polinómico, y tras contrastar la representación de los datos experimentales y analíticos, aparece el problema de que el ajuste de los datos experimentales produce que la longitud del eje difiera con la longitud correspondiente al estudio analítico y numérico. Para solventar dicho contratiempo, se adimensionaliza el dato de la posición en el eje, de tal modo que éste varía únicamente entre 0 y 1.

En las siguientes páginas, aparecen representados de forma superpuesta, los desplazamientos verticales frente a la posición correspondientes a cada barra, según los tres estudios considerados en este proyecto.



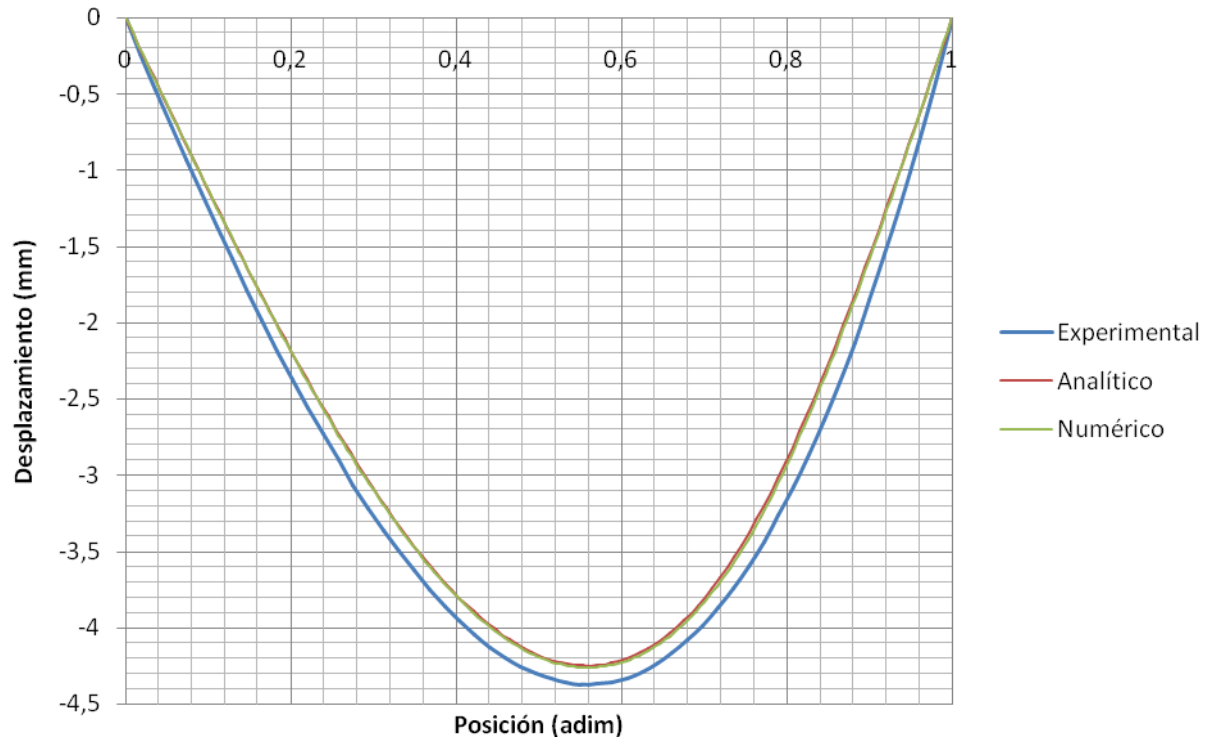
**BARRA 1**

Figura 6.1. Desplazamiento frente a posición para la barra 1

Flecha máxima estudio analítico: **-4,2483 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,3708 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2605 mm**

Cálculo del error en los estudios analítico y numérico:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,3708 - 4,2483|}{4,3708} \cdot 100 = 2,80 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,3708 - 4,2605|}{4,3708} \cdot 100 = 2,52 \%$$

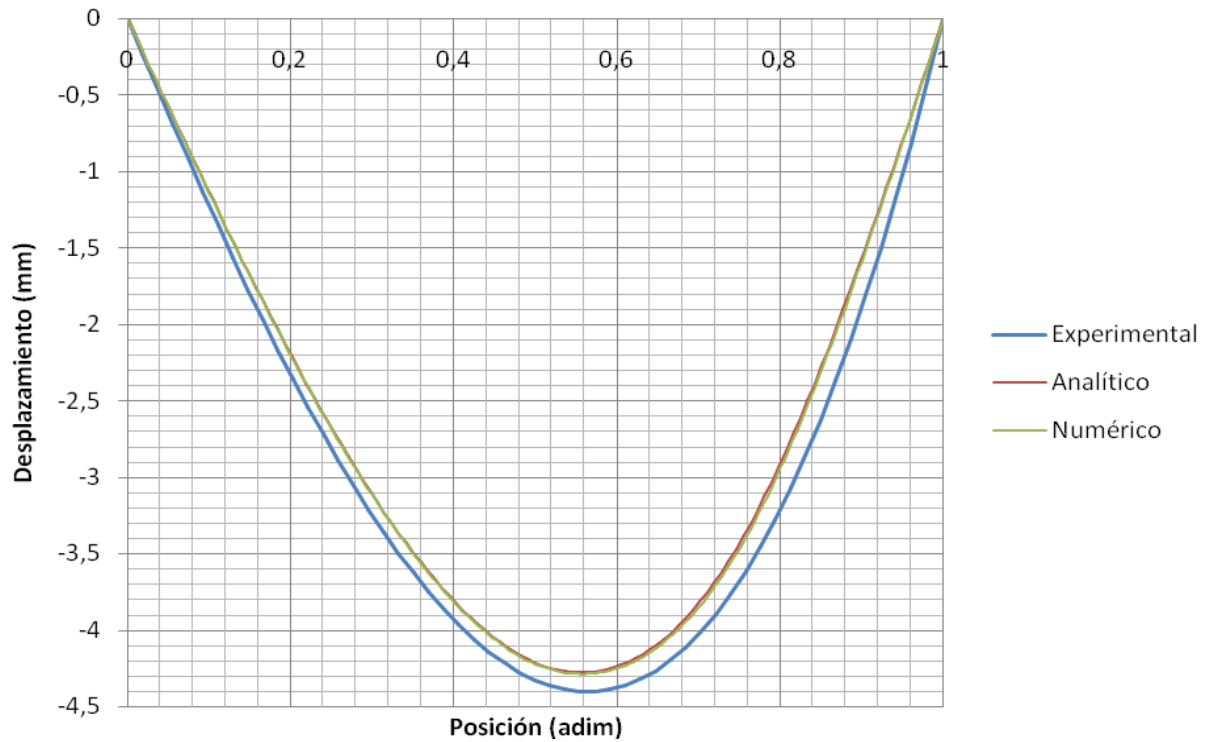
**BARRA 2**

Figura 6.2. Desplazamiento frente a posición para la barra 2

Flecha máxima estudio analítico: **-4,2762 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,4015 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2872 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4015 - 4,2762|}{4,4015} \cdot 100 = 2,85 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4015 - 4,2872|}{4,4015} \cdot 100 = 2,60 \%$$

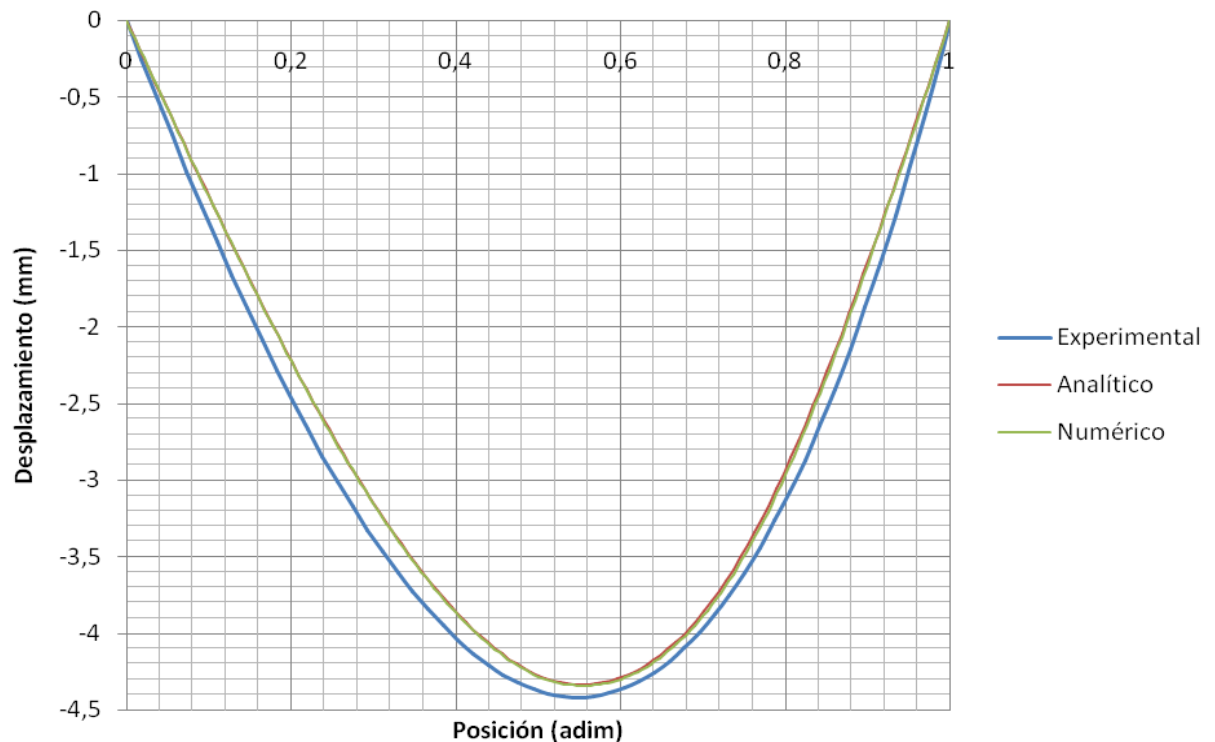
**BARRA 3**

Figura 6.3. Desplazamiento frente a posición para la barra 3

Flecha máxima estudio analítico: **-4,3353 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,4189 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,3430 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4189 - 4,3353|}{4,4189} \cdot 100 = 1,89 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4189 - 4,3430|}{4,4189} \cdot 100 = 1,72 \%$$

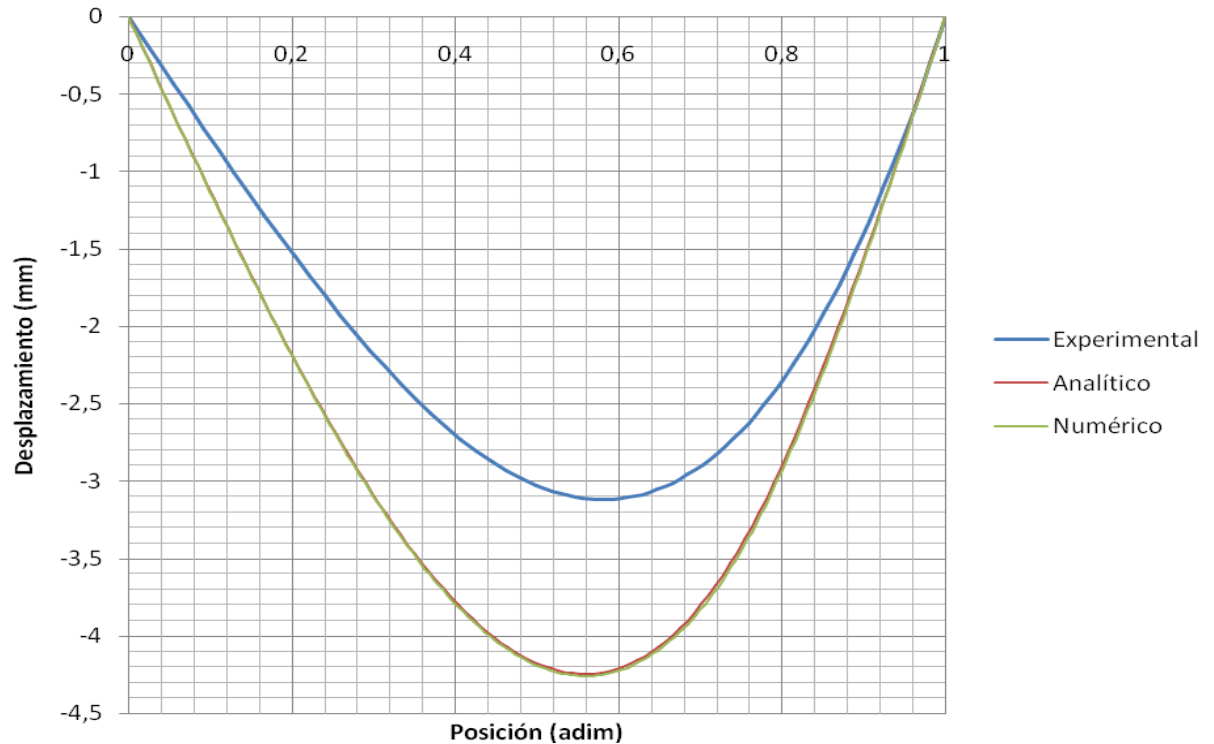
**BARRA 4**

Figura 6.4. Desplazamiento frente a posición para la barra 4

Flecha máxima estudio analítico: **-4,2456 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-3,1182 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2583 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,1182 - 4,2456|}{3,1182} \cdot 100 = 36,16 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,1182 - 4,2583|}{3,1182} \cdot 100 = 36,56 \%$$

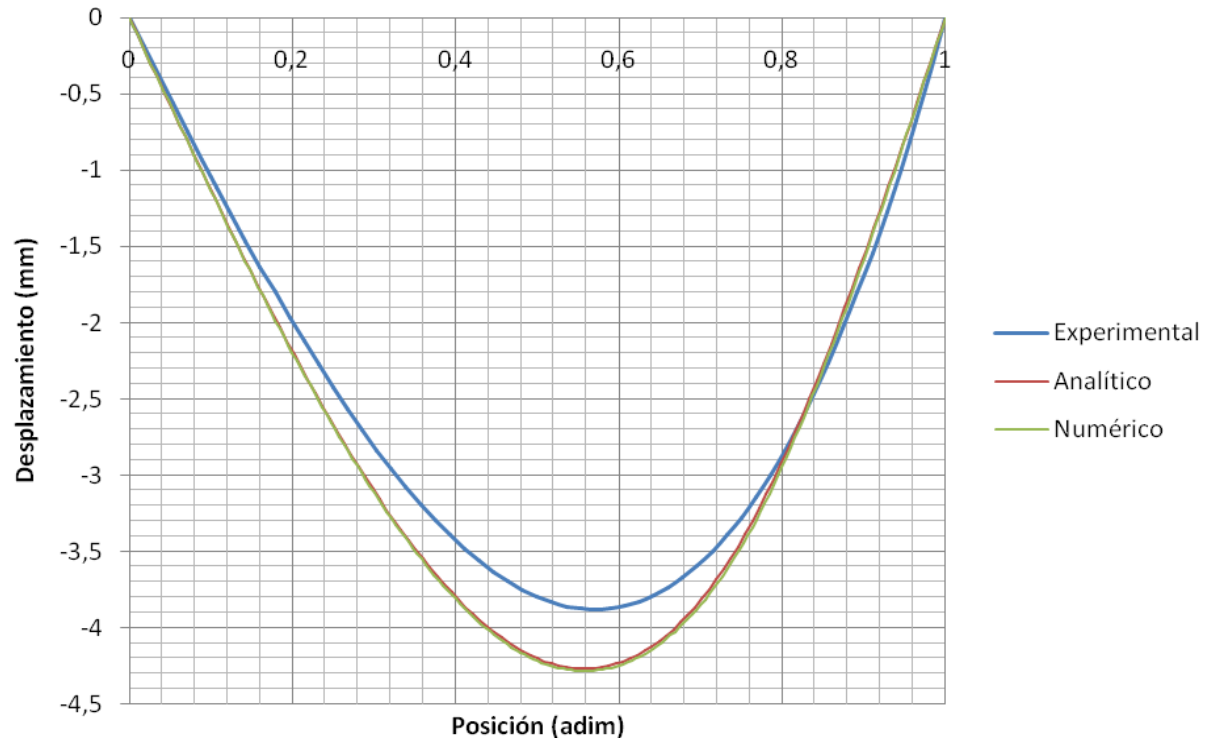
**BARRA 5**

Figura 6.5. Desplazamiento frente a posición para la barra 5

Flecha máxima estudio analítico: **-4,2656 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-3,8787 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2823 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,8787 - 4,2656|}{3,8787} \cdot 100 = 9,97 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,8787 - 4,2823|}{3,8787} \cdot 100 = 10,41 \%$$

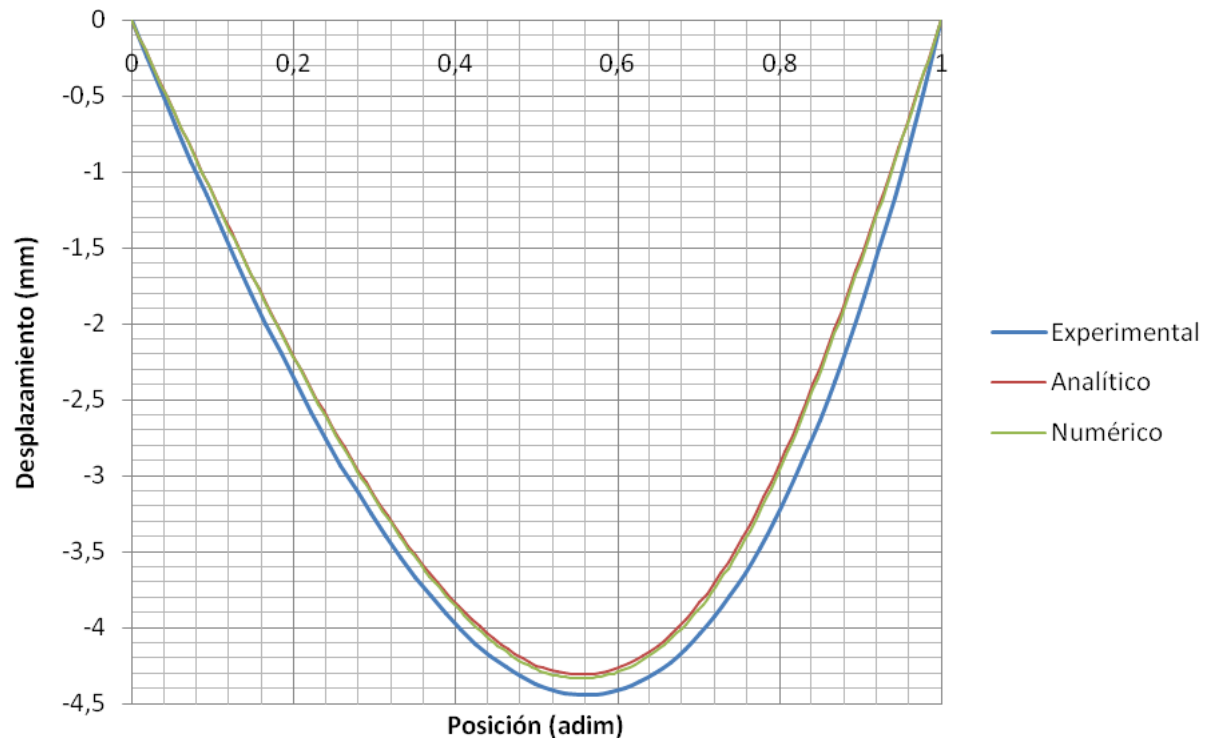
**BARRA 6**

Figura 6.6. Desplazamiento frente a posición para la barra 6

Flecha máxima estudio analítico: **-4,3095 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,4417 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,3342 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4417 - 4,3095|}{4,4417} \cdot 100 = 2,98 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,4417 - 4,3342|}{4,4417} \cdot 100 = 2,42 \%$$

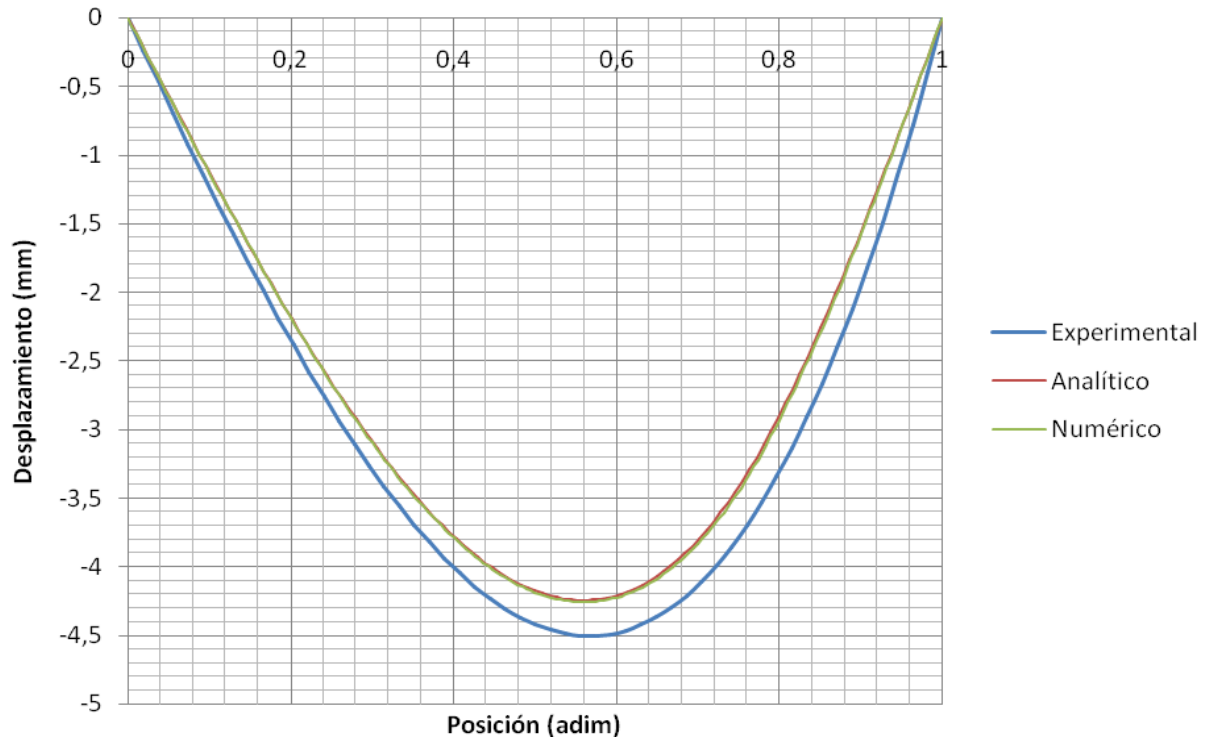
**BARRA 7**

Figura 6.7. Desplazamiento frente a posición para la barra 7

Flecha máxima estudio analítico: **-4,244 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,504 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2569 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,504 - 4,244|}{4,504} \cdot 100 = 5,77 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,504 - 4,2569|}{4,504} \cdot 100 = 5,49 \%$$

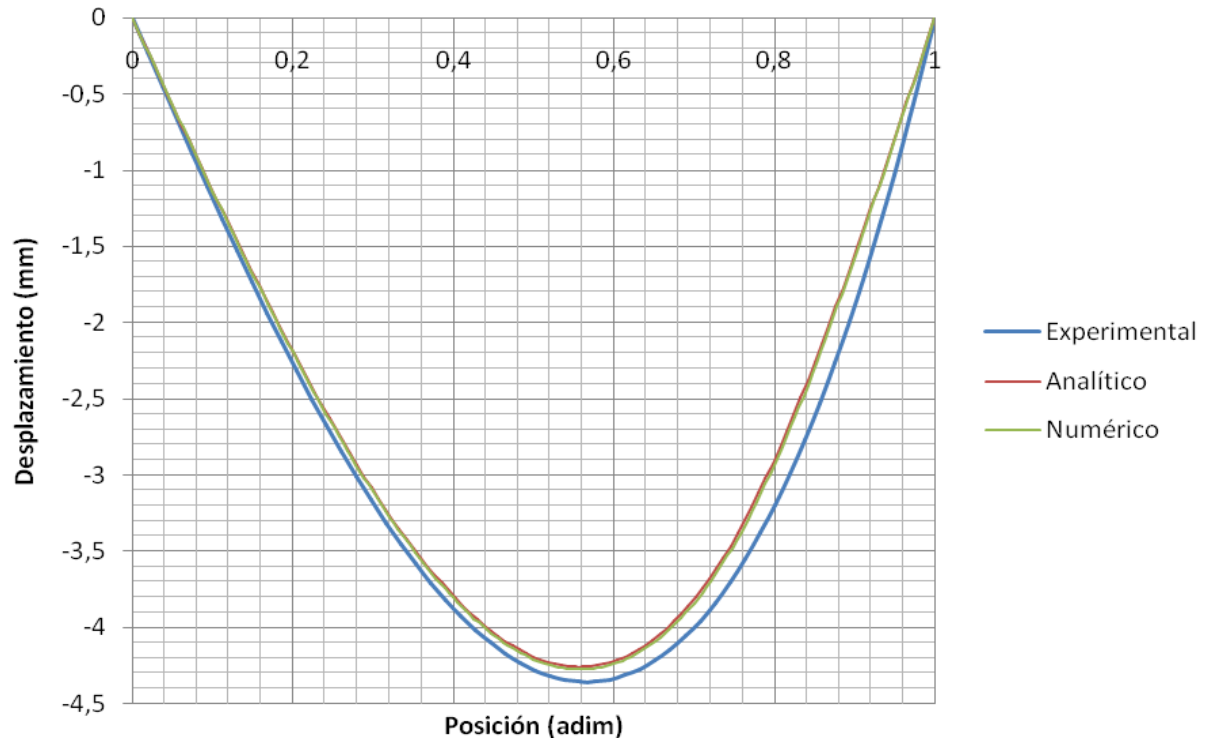
**BARRA 8**

Figura 6.8. Desplazamiento frente a posición para la barra 8

Flecha máxima estudio analítico: **-4,2599 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-4,3574 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,2753 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,3574 - 4,2599|}{4,3574} \cdot 100 = 2,24 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|4,3574 - 4,2753|}{4,3574} \cdot 100 = 1,88 \%$$



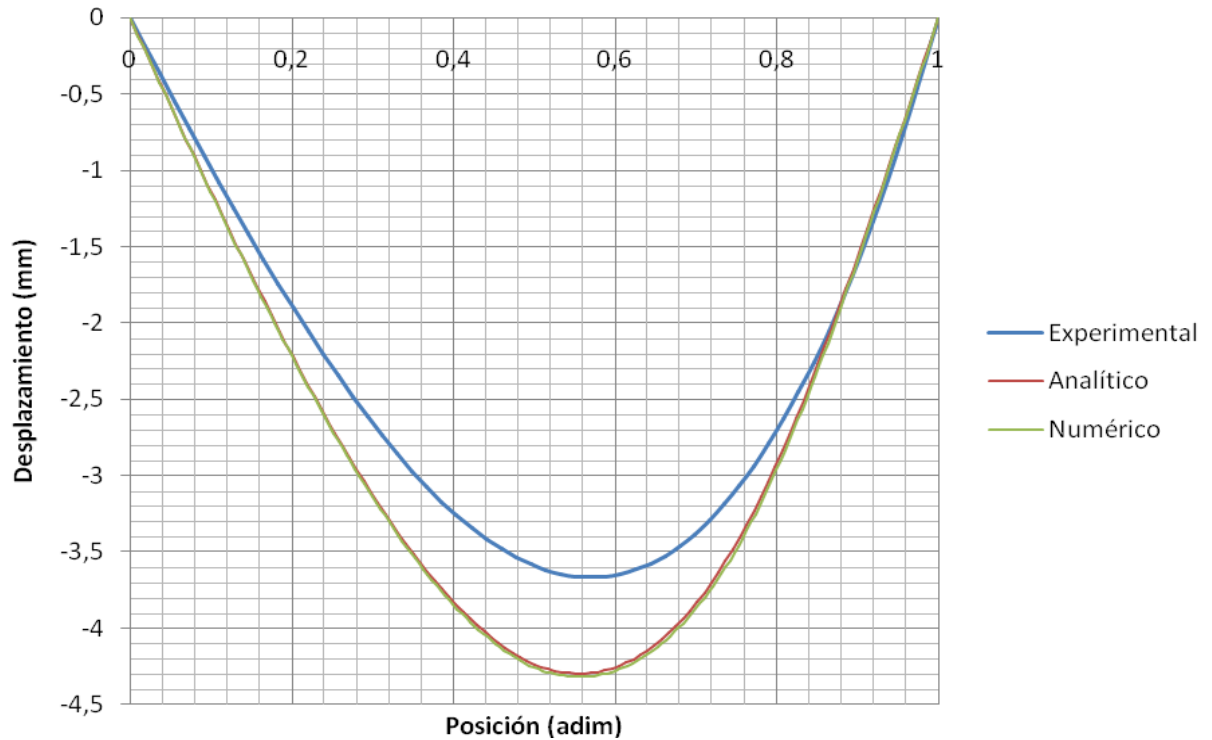
**BARRA 9**

Figura 6.9. Desplazamiento frente a posición para la barra 9

Flecha máxima estudio analítico: **-4,297 mm**

Flecha máxima estudio experimental: **-3,667 mm**

Flecha máxima análisis numérico: **-4,3182 mm**

Cálculo del error:

$$\varepsilon_{\text{analítico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,analít}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,667 - 4,297|}{3,667} \cdot 100 = 17,18 \%$$

$$\varepsilon_{\text{numérico}} = \frac{|y_{\text{max,exp}} - y_{\text{max,num}}|}{y_{\text{max,exp}}} \cdot 100 = \frac{|3,667 - 4,3182|}{3,667} \cdot 100 = 17,76 \%$$

La primera conclusi3n que se puede obtener a la vista de los resultados obtenidos es que, en la mayoría de los casos, la diferencia entre los resultados experimentales y los analíticos y numéricos no supera el 6%. En estos casos, el desplazamiento experimental siempre resulta ser mayor que el analítico y numérico. También se observa la gran similitud que existe entre los desplazamientos analíticos y numéricos, que en todos los casos dan lugar a curvas prácticamente superpuestas, pero en todos los casos el desplazamiento resulta mayor desde el punto de vista numérico. También se observa que, al estar aplicada la carga a la derecha de la fisura, la flecha máxima no aparece centrada, sino desplazada ligeramente hacia la derecha.

S3lo en tres casos (barras 4, 5 y 9), el error supera el 10%. También se observa que, al contrario que en el resto de casos, el desplazamiento experimental resulta ser inferior al analítico y numérico. Estos resultados no parecen fiables, ya que en el resto de casos se obtienen desplazamientos superiores a 4,2 mm, y por el contrario, en estos tres son incluso inferiores a 4 mm, y no se entiende como lógico este descenso tan brusco. Las variaciones realizadas en los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  generan unos cambios en el valor de la flexibilidad del eje que se traducen en variaciones del orden de centésimas de milímetro, o como máximo, de una décima de milímetro en lo que respecta a los desplazamientos.

Esta diferencia entre los resultados experimentales y los analíticos y numéricos no se debe a unos pocos datos err3neos, que darían lugar a una desviaci3n del ajuste polin3mico menos acusada, sino que se observa que todos ellos muestran valores de desplazamiento bastante por debajo de lo observado en el resto de barras. Esto se puede observar en el Anexo final de este documento, que contiene las tablas con los datos recogidos directamente en la campaa de ensayos. En estos tres casos, el máximo valor de desplazamiento que se obtiene del reloj comparador ni siquiera supera los 3 mm. Esto puede achacarse a la previa plastificaci3n de dichas tres barras, puesto que se observaba que presentaban una pequeña deformaci3n, sin ni siquiera haber practicado aún el ensayo sobre ellas.



Con la salvedad de estos tres casos, se puede asumir como válidos los modelos analítico y numérico utilizados en este proyecto, ya que presentan una gran cercanía a los resultados experimentales.

Este primer análisis de resultados ha sido utilizado principalmente para comprobar la validez de los tres modelos implicados en el estudio. Para poder analizar de manera más clara la influencia de los parámetros de fisura, se realizan estudios que impliquen un solo modelo de los tres.

## **6.2.- Influencia de la geometría de la fisura**

En este caso, considerando sólo uno de los tres estudios, se realiza una comparación entre los desplazamientos de todas las barras. Ya que en el estudio experimental, en tres casos se han obtenido resultados bastante alejados de los obtenidos en los estudios numérico y analítico, no se podrían obtener conclusiones acertadas mediante la representación de los datos de dicho estudio. Por lo tanto, se opta por representar los desplazamientos correspondientes a las nueve barras mediante el estudio numérico, ya que numérico y analítico ofrecen resultados prácticamente idénticos.

Se opta por centrarse en los desplazamientos máximos, obviándose los resultados para zonas más cercanas a los extremos, para así obtener un mayor detalle. La representación gráfica se muestra a continuación.

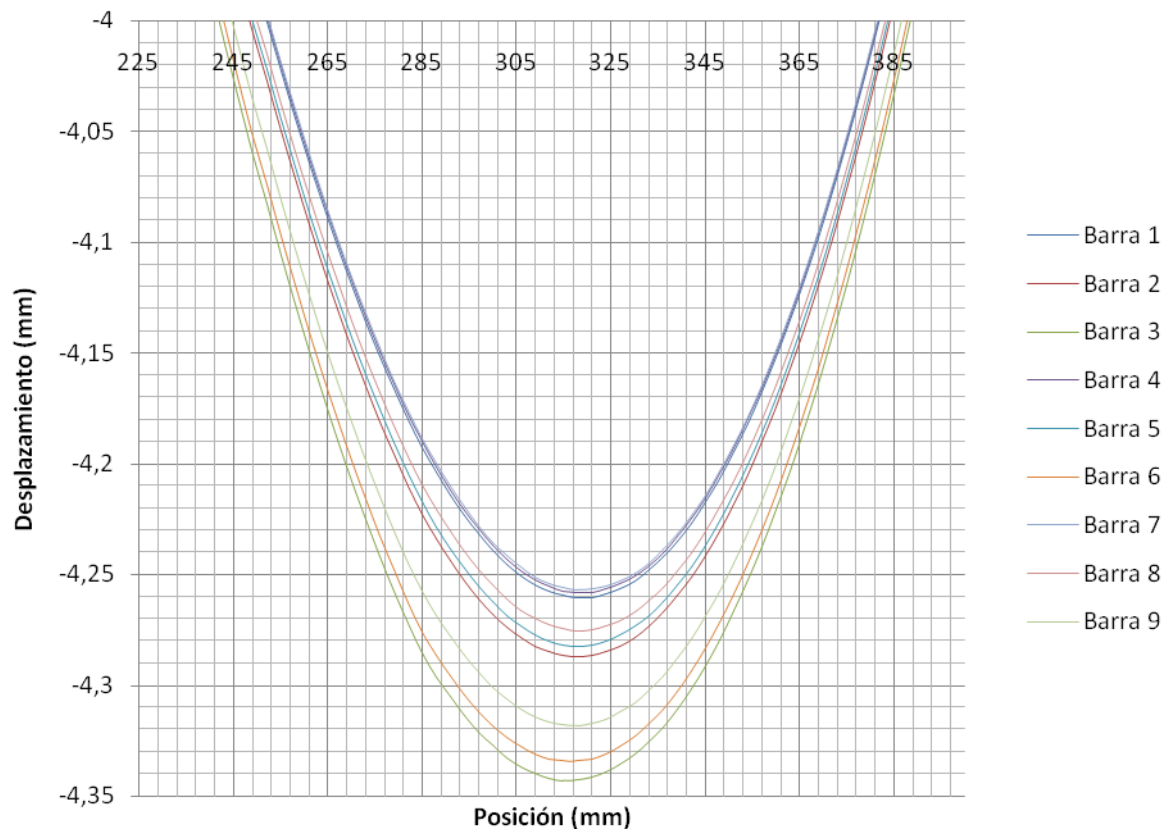


Figura 6.10. Desplazamiento frente a posición mediante análisis numérico (MEF)

En la gráfica se observa que los valores de los desplazamientos se agrupan de tres en tres. Cada grupo de tres corresponde a un mismo valor de  $\alpha$ , lo cual quiere decir que es el factor de mayor influencia en el desplazamiento. Los grupos con mayor valor de  $\alpha$  dan lugar a un mayor valor de los desplazamientos. Dentro de un mismo valor de  $\alpha$ , es decir, dentro del mismo grupo, los desplazamientos aumentan al disminuir  $\beta$ , esto es, para frentes de fisura que tienden a ser rectos. En este caso, la longitud del arco de fisura es mayor, al igual que el área fisurada. En la formulación del problema realizada en el capítulo 2 de este documento, ya se ha visto cómo dichos parámetros tienen influencia directa sobre el valor de la flexibilidad del eje, esto es, sobre los valores de desplazamiento vertical.

A continuaci3n, como complemento del apartado anterior, se incluye una tabla con el valor del coeficiente de flexibilidad adimensional,  $\bar{\lambda}_{mm}$ , para cada una de las barras, obtenido mediante la implementaci3n de las ecuaciones del capítulo 2 en *Matlab*.

	$\alpha$	$\beta$	$\bar{\lambda}_{mm}$
Barra 1	0,1	0	$8,8034 \cdot 10^{-4}$
Barra 2	0,2	0	$4,3 \cdot 10^{-3}$
Barra 3	0,3	0	0,0114
Barra 4	0,1	0,25	$5,5373 \cdot 10^{-4}$
Barra 5	0,2	0,25	$3 \cdot 10^{-3}$
Barra 6	0,3	0,25	$8,3 \cdot 10^{-3}$
Barra 7	0,1	0,5	$3,4974 \cdot 10^{-4}$
Barra 8	0,2	0,5	$2,3 \cdot 10^{-3}$
Barra 9	0,3	0,5	$6,8 \cdot 10^{-3}$

*Tabla 6.1.* Valores de los coeficientes de flexibilidad adimensionales

Como se puede observar, los datos de coeficiente adimensional corroboran lo obtenido en la representaci3n gráfca. Los mayores valores de  $\alpha$  resultan en coeficientes de flexibilidad mayores, y en último término, en desplazamientos mayores. Dentro del mismo valor de alfa, menores valores de  $\beta$ , esto es, frentes de fisura más rectos y por lo tanto, mayores áreas de fisura, también producen un aumento del coeficiente de flexibilidad.



# **7**

# **CONCLUSIONES**

# **Y**

# **TRABAJOS FUTUROS**



## 7.- CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

### 7.1.- Conclusiones

En este Proyecto Fin de Carrera se ha realizado el análisis del comportamiento que presentan una serie de ejes con fisuras de diferentes geometrías sometidos a cargas estáticas. Dicho análisis se ha realizado y contrastado desde tres distintos puntos de vista: experimental, analítico y numérico, a partir de los valores de desplazamiento que presentan los ejes empleados en los diferentes estudios.

Se ha desarrollado la formulación analítica que relaciona la deformada de una barra fisurada de sección circular con la geometría (forma y tamaño) de la fisura, para una condición de apoyo correspondiente a una barra biapoyada.

De igual modo, se ha realizado una campaña de ensayos sobre ejes con geometrías de fisura diferentes, para contrastar los resultados analíticos obtenidos en primer lugar. En la gran mayoría de los ensayos, dicha comparación arroja unos resultados ciertamente satisfactorios.

Por último, se ha incluido un apartado de análisis numérico con un software que utiliza Método de Elementos Finitos (*ABAQUS*, en su versión 6.7), para realizar un segundo contraste con los datos experimentales.

De los resultados obtenidos para cada uno de los ejes se deduce que los mayores desplazamientos se producen en los casos en que la profundidad de fisura es mayor, es decir, mayores valores del parámetro  $\alpha$ .

Tambín se puede concluir que, dentro de un mismo valor de  $\alpha$ , los mayores desplazamientos tienen lugar cuanto menor es el valor de  $\beta$ , es decir, fisuras que tienden a ser de frente recto, de mayor longitud y área.

Como idea que sintetice las anteriores, se puede expresar que  $\alpha$  es el parámetro más influyente, quedando la influencia de  $\beta$  en un nivel bastante inferior.

## 7.2.- Trabajos futuros

Durante la realización de este proyecto han surgido diferentes ideas para complementar el trabajo realizado, como futuros trabajos. Se exponen a continuación:

Ante las dificultades que plantea la toma de medidas en el marco de ensayos utilizado, sería conveniente la utilización de un banco con un diseño más eficiente, con el propósito de eliminar la mayor longitud posible de zona muerta de ensayo, mejorar las sujeciones, sobre todo en lo referente a la zona de los apoyos. Sería interesante contar con un banco que dispusiese de un utillaje capaz de soportar las cargas en ensayos para ejes de mayor diámetro, ya que en este proyecto se planteó inicialmente dicho estudio, pero se acabó descartando debido a la incapacidad del utillaje de carga disponible para soportar cargas que diesen lugar a desplazamientos similares a los trabajados en el presente proyecto.

A partir del cambio de banco de pruebas sería interesante también un estudio experimental de ejes con fisura elíptica tratando de cambiar las condiciones de apoyo (biempotrada, en voladizo, apoyada-empotrada, etc). Los útiles de sujeción no permitían otra posibilidad que ejes biapoyados.

También cabe la posibilidad de realizar ensayos cambiando la posición y el valor de la carga aplicada, o incluso aplicar más de una carga simultáneamente. También, se





podŕa variar la posici3n de la fisura o, de igual modo que en las cargas, practicar ḿs de una fisura en cada barra, pudiendo estudiarse como afecta la existencia de una fisura en la flexibilidad de otra secci3n con fisura.

Todas estas posibilidades de estudio desde el punto de vista experimental, seŕa interesante acompa~arlas, al igual que en este proyecto, de un análisis numérico a partir de un software que utilice Ḿtodo de Elementos Finitos, contrastando los valores obtenidos a partir de uno y otro.



# 8

# BIBLIOGRAFÍA

---

## 8.- BIBLIOGRAFÍA

- [1] L. Rubio, B. Muńoz, Determinación de la flexibilidad de ejes con fisuras de frente elíptico, *Anales de Mecánica de la Fractura*, pp. 587-592, 2007.
- [2] R. Gasch, Dynamic behaviour of a simple rotor with a cross-sectional crack, *Vibrations in rotating machinery, ImechE Conference paper, C178/76*, 1976.
- [3] A.D. Dimarogonas, C. Papadopoulos, Vibrations of cracked shafts in bending, *Journal of Sound and Vibration* 91, pp. 583–593, 1983.
- [4] C.A. Papadopoulos, A.D. Dimarogonas, Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack, *Journal of Sound and Vibration* 117 (1), pp. 81–93, 1987.
- [5] Y-S. Shih, J-J. Chen, Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft, *International Journal of Fatigue* 19, pp. 477–485, 1997.
- [6] C.S. Shin, C.Q. Cai, Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending, *International Journal of Fracture* 129, pp. 239–264, 2004.
- [7] T.M. Tharp, A finite element for edge-cracked beam columns, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 24, pp. 1941–1950, 1987.
- [8] A. Carpinteri, Stress intensity factors for straightfronted edge cracks in round bars, *Engineering Fracture Mechanics* 42, pp. 1035–1040, 1992.



- 
- [9] N. Álvarez, B. González, J.C. Matos, J. Toribio, Factores de intensidad de tensiones y propagación de fisuras por fatiga en geometrías cilíndricas, *Anales de mecánica de la fractura* (23), pp. 333–338, 2006.
- [10] N. Couroneau, J. Royer, Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I, *International Journal of Fatigue* 20, pp. 711–718, 1998.
- [11] M.A. Astiz, An incompatible singular elastic element of two- and three-dimensional crack problems, *International Journal of Fracture* 31, pp. 105–124, 1986.
- [12] Y-S. Shih, J-J. Chen, The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft, *Nuclear Engineering and Design* 214, pp. 137–145, 2002.
- [13] J. Moscoso Cabrera, Proyecto fin de carrera, *Análisis experimental del comportamiento en flexión de un eje fisurado*, 2008
- [14] J. Álvarez del Teso, Proyecto fin de carrera, *Estudio analítico del comportamiento de una viga fisurada de sección circular con diferentes condiciones de apoyo*, 2006.
- [15] L. Ortiz Berrocal, Resistencia de Materiales, McGraw-Hill, 1997



# ***ANEXO***

## **TABLAS DE DATOS DE DESPLAZAMIENTOS**

---

## ANEXO: TABLAS DE DATOS DE DESPLAZAMIENTOS

A continuaci3n, como anexo, se incluyen los resultados obtenidos directamente en el marco de ensayos durante el desarrollo experimental del proyecto. Representan la lectura directa del reloj comparador para cada posici3n en el eje. No se ha tenido en cuenta la zona muerta de medida, por lo que el punto  $x = 0$  corresponde al primer punto tras dicha zona muerta.

### DISPOSICIONES GENERALES

- Diámetro de los ejes: 10 mm
- Condici3n de apoyo: eje biapoyado
- Distancia entre apoyos: 570 mm
- Fisura colocada en el punto medio del eje, esto es, a 285 mm del origen
- Carga de 55,6 N:
  - Pesa: 48 N
  - Utillaje: 7,6 N
- Posici3n de la carga: a  $\frac{3}{4}$  de la distancia entre apoyos respecto del origen, es decir, 427,5 mm respecto del apoyo A.
- Datos de desplazamientos tomados cada 10 mm recorridos sobre el eje.

*Nota:* todos los datos de posici3n tienen como referencia el primer punto tras la zona muerta del primer apoyo. Nótese que existe un salto entre los datos de posiciones 360 mm y 400 mm debido a la zona muerta que produce el utillaje de sujeci3n de la carga.



## **BARRA 1**

$$\alpha = 0,1$$

$$\beta = 0$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,3
10	-0,22	230	-3,36
20	-0,43	240	-3,39
30	-0,63	250	-3,43
40	-0,83	260	-3,44
50	-1,03	270	-3,44
60	-1,22	280	-3,42
70	-1,41	290	-3,39
80	-1,6	300	-3,35
90	-1,77	310	-3,28
100	-1,93	320	-3,2
110	-2,1	330	-3,13
120	-2,27	340	-3,02
130	-2,41	350	-2,9
140	-2,55	360	-2,76
150	-2,68	400	-2,1
160	-2,8	410	-1,9
170	-2,92	420	-1,68
180	-3,01	430	-1,43
190	-3,1	440	-1,18
200	-3,18	450	-0,92
210	-3,25	460	-0,63



## **BARRA 2**

$$\alpha = 0,2$$

$$\beta = 0$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,35
10	-0,21	230	-3,4
20	-0,43	240	-3,44
30	-0,63	250	-3,48
40	-0,85	260	-3,49
50	-1,05	270	-3,49
60	-1,23	280	-3,48
70	-1,42	290	-3,45
80	-1,61	300	-3,41
90	-1,78	310	-3,34
100	-1,95	320	-3,27
110	-2,12	330	-3,18
120	-2,29	340	-3,08
130	-2,42	350	-2,96
140	-2,55	360	-2,81
150	-2,7	400	-2,14
160	-2,83	410	-1,91
170	-2,94	420	-1,67
180	-3,04	430	-1,42
190	-3,13	440	-1,17
200	-3,22	450	-0,91
210	-3,29	460	-0,61





### **BARRA 3**

$$\alpha = 0,3$$

$$\beta = 0$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,32
10	-0,21	230	-3,36
20	-0,42	240	-3,4
30	-0,63	250	-3,41
40	-0,85	260	-3,42
50	-1,05	270	-3,4
60	-1,24	280	-3,39
70	-1,43	290	-3,35
80	-1,61	300	-3,3
90	-1,79	310	-3,22
100	-1,96	320	-3,14
110	-2,13	330	-3,04
120	-2,28	340	-2,92
130	-2,43	350	-2,81
140	-2,56	360	-2,66
150	-2,69	400	-2,03
160	-2,81	410	-1,82
170	-2,92	420	-1,6
180	-3,02	430	-1,35
190	-3,12	440	-1,12
200	-3,19	450	-0,86
210	-3,26	460	-0,62



## **BARRA 4**

$$\alpha = 0,1$$

$$\beta = 0,25$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-2,39
10	-0,13	230	-2,44
20	-0,26	240	-2,48
30	-0,41	250	-2,5
40	-0,55	260	-2,53
50	-0,68	270	-2,53
60	-0,81	280	-2,53
70	-0,95	290	-2,52
80	-1,07	300	-2,5
90	-1,2	310	-2,46
100	-1,33	320	-2,41
110	-1,44	330	-2,35
120	-1,56	340	-2,28
130	-1,66	350	-2,2
140	-1,76	360	-2,1
150	-1,86	400	-1,64
160	-1,96	410	-1,48
170	-2,05	420	-1,3
180	-2,13	430	-1,12
190	-2,21	440	-0,92
200	-2,28	450	-0,73
210	-2,34	460	-0,53



## **BARRA 5**

$$\alpha = 0,2$$

$$\beta = 0,25$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-2,86
10	-0,17	230	-2,91
20	-0,34	240	-2,95
30	-0,52	250	-2,98
40	-0,69	260	-2,99
50	-0,86	270	-2,99
60	-1,02	280	-2,99
70	-1,19	290	-2,97
80	-1,33	300	-2,94
90	-1,48	310	-2,89
100	-1,63	320	-2,82
110	-1,78	330	-2,75
120	-1,9	340	-2,67
130	-2,03	350	-2,57
140	-2,16	360	-2,46
150	-2,28	400	-1,84
160	-2,39	410	-1,66
170	-2,49	420	-1,46
180	-2,58	430	-1,26
190	-2,66	440	-1,04
200	-2,74	450	-0,81
210	-2,8	460	-0,58



## **BARRA 6**

$$\alpha = 0,3$$

$$\beta = 0,25$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,38
10	-0,22	230	-3,43
20	-0,43	240	-3,47
30	-0,62	250	-3,49
40	-0,83	260	-3,51
50	-1,04	270	-3,5
60	-1,22	280	-3,49
70	-1,42	290	-3,45
80	-1,61	300	-3,41
90	-1,78	310	-3,34
100	-1,96	320	-3,27
110	-2,13	330	-3,18
120	-2,29	340	-3,07
130	-2,43	350	-2,96
140	-2,57	360	-2,81
150	-2,71	400	-2,09
160	-2,83	410	-1,88
170	-2,95	420	-1,65
180	-3,06	430	-1,4
190	-3,15	440	-1,15
200	-3,24	450	-0,9
210	-3,31	460	-0,62

## **BARRA 7**

$$\alpha = 0,1$$

$$\beta = 0,5$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,43
10	-0,22	230	-3,49
20	-0,43	240	-3,53
30	-0,64	250	-3,56
40	-0,84	260	-3,58
50	-1,05	270	-3,58
60	-1,25	280	-3,57
70	-1,43	290	-3,53
80	-1,63	300	-3,5
90	-1,8	310	-3,44
100	-1,97	320	-3,36
110	-2,15	330	-3,27
120	-2,31	340	-3,16
130	-2,46	350	-3,04
140	-2,6	360	-2,91
150	-2,75	400	-2,13
160	-2,88	410	-1,9
170	-3	420	-1,68
180	-3,11	430	-1,42
190	-3,21	440	-1,17
200	-3,29	450	-0,92
210	-3,37	460	-0,65

## **BARRA 8**

$$\alpha = 0,2$$

$$\beta = 0,5$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-3,33
10	-0,22	230	-3,38
20	-0,43	240	-3,42
30	-0,63	250	-3,45
40	-0,84	260	-3,47
50	-1,04	270	-3,46
60	-1,23	280	-3,45
70	-1,41	290	-3,43
80	-1,59	300	-3,39
90	-1,76	310	-3,33
100	-1,92	320	-3,26
110	-2,1	330	-3,16
120	-2,26	340	-3,06
130	-2,4	350	-2,95
140	-2,54	360	-2,81
150	-2,67	400	-2
160	-2,81	410	-1,8
170	-2,92	420	-1,56
180	-3,03	430	-1,32
190	-3,12	440	-1,08
200	-3,2	450	-0,83
210	-3,27	460	-0,56

## **BARRA 9**

$$\alpha = 0,3$$

$$\beta = 0,5$$

Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)	Posición (mm)	Desplazamiento vertical(mm)
0	0	220	-2,79
10	-0,16	230	-2,84
20	-0,33	240	-2,88
30	-0,5	250	-2,91
40	-0,66	260	-2,93
50	-0,83	270	-2,93
60	-0,98	280	-2,93
70	-1,15	290	-2,9
80	-1,29	300	-2,88
90	-1,43	310	-2,82
100	-1,58	320	-2,76
110	-1,73	330	-2,69
120	-1,85	340	-2,61
130	-1,97	350	-2,52
140	-1,09	360	-2,4
150	-2,21	400	-1,87
160	-2,32	410	-1,69
170	-2,42	420	-1,49
180	-2,51	430	-1,29
190	-2,6	440	-1,08
200	-2,67	450	-0,85
210	-2,74	460	-0,62